Mathematisches
Lehrbuch
zum Gebrauche
öffentlicher Vorlesungen
auf der
churfürstl. baierischen Universität
in Landshut,
verfaßt vom

Maurus Magold,
churfürstl. geistl. Rathe und öffentl. ordentl. Professor
der Mathematik allda.

Des III. Theiles II. Abtheilung,
welche die höhere Geometrie, nebst Herrn Landes-Directionsrathes von Voith Vorschläge zur Vervollkommnung der Markscheiderinstrumente, und dessen Tabelle der Seigerteufen und Sohlen enthält.

Mit 2 Kupfern, Nro. VII. und VIII. nebst 4 gedruckten Tabellen Nro. V. — VIII. zur höhern Geometrie, und 7 Kupfertabellen zu H. v. Voiths Abhandlung.

Mit Censurfreyheit der churfürstl. Universität.

Landshut
in der Anton Weberschen Buchhandlung.
1805.

Lehrbuch
der
höhern Geometrie
zum Gebrauche
öffentlicher Vorlesungen
auf der
churfürstl. baierischen Universität
in Landshut,
verfaßt vom
Maurus Magold,
churfürstl. geistl. Rathe und öffentl. ordentl. Professor
der Mathematik allda.

Nebst

Herrn v. Voiths, Landesdirectionsrathes in Amberg Vorschlägen zur Vervollkommnung der Markscheiderinstrumente, und dessen Tabelle der Seigerteufen und Sohlen.

Mit 2 Kupfern Nro. VII. und VIII., und 4 gedruckten Tabellen Nro. V. — VIII. zur höhern Geometrie, und 7 Kupfertabellen zur H. v. Voiths Abhandlung.

Mit Censurfreyheit der churfürstl. Universität.

Landshut
in der Anton Weberschen Buchhandlung.
1805.

Inhalt.

Die höhere Geometrie.

Seite.

I. Hauptstück. Von krummen Linien überhaupt. 417

I. Abschnitt. Von der Beschaffenheit krummer Linien, und ihrer Abscissen und Ordinaten. 417

II. Abschnitt. Von trigonometrischen Differentialen, und von der Integration durch Kreisbögen. 427

III. Abschnitt. Von den Verhältnissen krummer Linien überhaupt 460

II. Hauptstück. Von Kegelschnitten . . 484

I. Abschnitt. Von Kegelschnitten überhaupt. 484

II. Abschnitt. Von der Parabel. . . 488

III. Abschnitt. Von der Ellipse. . . . 513

IV. Abschnitt. Von der Hyperbel. . . 566

V. Abschnitt. Vom Kreise. 607

Seite.

III. Hauptstück. Von höhern algebraischen, und transcendenten Linien. 627

I. Abschnitt. Von der Cissoid und Conchoid. 627

II. Abschnitt. Von der Quadratrix und Schneckenlinie. 639

III. Abschnitt. Von der Cycloide oder Radlinie. 645

Vorschläge zur Vervollkommnung der Markscheider-Instrumente vom Ignaz von Voith.

Markscheidetabellen der Seigerteufen und Sohlen, so wie der Breiten und Längen nach dem Decimalsystem in 0,1 Theilen einer Prim.

Höhere Geometrie.

I. Hauptstück.

Von krummen Linien überhaupt.

I. Abschnitt.

Von der Beschaffenheit krummer Linien, und ihrer Abscissen und Ordinaten.

§. 231.

Erklärungen:

a) Eine krumme Linie (§. 4, Geometrie), welche ganz in einer Ebene liegt, heißt eine krumme Linie von einfacher Krümmung, und

b) von doppelter Krümmung, wenn ihre Puncte in verschiedenen Ebenen liegen.

§. 232.

Erklärung: (Fig. 79 und 80.)

Wenn man bey einer Linie AMN mit einfacher Krümmung in ihrer Ebene die gerade Linie AO, und durch beliebige Puncte P, p derselben, Parallellinien PM, pm zieht, welche die krumme Linie in M, m schneiden, so heißt

a) AO die Abscissenlinie, und,

b) wenn man A zu ihrem Anfangspunct nimmt, so sind AP, Ap die Abscissen, und MP, mp die Ordinaten für die Puncte M, m der krummen Linie.

c) Die Abscisse AP und ihre entsprechende Ordinate PM, heißen zusammen Coordinaten, und zwar

α) rechtwinklichte, wenn die Ordinate auf der Abscisse senkrecht steht, wie Fig. 79;

β) schiefwinklichte Coordinaten, wenn die Ordinate schief steht, wie Fig. 80.

1. **Zusatz:** Wenn in der Ebene der krummen Linie die Lage und der Anfangspunct A der Abscissenlinie AO bekannt ist, so ist durch die Grösse der rechtwinklichten Coordinaten AP, PM die Lage des Punctes M der krummen Linie gegeben, hingegen

II. Zusatz: bey schiefwinklichten Coordinaten (Fig. 80) muß überdieß noch der schiefe Winkel MPO gegeben seyn.

III. Zusatz: Für den Anfangspunct A der Abscissenlinie AO (Fig. 79) sind die Abscissen AP, Ap einander entgegensetzt, man nimmt daher erstere als eine positive, und letztere als eine negative Größe; und eben so ist's in Rücksicht der Ordinaten PM und pm oder Fig. 80 PM und PM', pm pm' (§. 205 II. Zus. Geom.)

IV. Zusatz: (Fig. 81) Stelle AMN eine Linie mit doppelter Krümmung vor, durch A lege man die Ebene BC, und ziehe in ihr die beliebige gerade Linie AO; von den Puncten M, N, Q' der krummen Linie fälle man auf die Ebene BC die Perpendikel Mm, Nn, Q'q, von m, n, q ziehe man in letzterer Ebene auf AO die senkrechten Linien mP, nR, qQ; so ist durch AP, Pm, mM die Lage von M, und eben so durch AR, Rn, nN die Lage von N gegeben, mithin ist durch die Abscisse und die beyden rechtwinklichten Ordinaten jeder Punct der Linie mit doppelter Krümmung gegeben.

Anmerkung: Im gegenwärtigen Lehrbuche werden nur Linien von einfacher Krümmung abgehandelt, mithin nur solche in der Folge unter dem Namen krummer Linien verstanden.

§. 233.

Erklärung: (Fig. 82).

Eine Gleichung, welche das allgemeine Verhältniß der Coordinaten für jeden Punct einer krummen Linie angiebt, heißt eine Gleichung dieser krummen Linie; so ist z. B. $PM^2 = AP \cdot PO$ eine Gleichung des Kreises (§. 101, Geom.)

I. Zusatz: Durch die Gleichung einer krummen Linie ist letztere vollkommen bestimmt (§. 232, I. — III. Zusatz).

II. Zusatz: Da die Gleichung einer krummen Linie für jeden Punct derselben das Verhältniß der Coordinaten angiebt, so sind letztere keine beständige, sondern veränderliche Größen, daher bezeichnet man gewöhnlich die Abscissen mit x, und die Ordinaten mit y (§. 184, Arithm.); setzet man im Kreise die Abscisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$, und den Diameter AO als eine beständige Größe $= a$; so ist für den Kreis $y^2 = ax - x^2$ (§. 101, Zus. Geom.)

III. Zusatz: Die Gleichung einer krummen Linie enthält also, ausser den veränderlichen, noch beständige Größen, mithin stellt sie eine Function der veränderlichen Größe x und y vor; denn in der

Glei-

Gleichung für den Kreis, oder $y^2 = ax - x^2$, ist y eine Function von x, und umgekehrt x eine Function von y (§. 185, Arithm.)

IV. Zusatz: Nimmt man zur Abscisse $AP = x$ noch eine beliebige $Ap = x'$ als Hilfslinie, so ist $Pp = Ap - AP = x' - x$ eine unendlich kleine Größe; denn man kann Ap beliebig, mithin den Punct p an P so nahe nehmen, als man will (§. 295, II. Zus. Arithm.); folglich ist Pp das Differential der Abscisse AP, oder $Pp = dx$ (§. 302, Arithm.)

V. Zusatz: Zieht man durch P, p die Ordinaten $PM = y$, und $pm = y'$, so sind sie Functionen von x, x', mithin ist $mn = pm - PM = y' - y$ ebenfalls eine unendlich kleine Größe; denn wenn $x' - x = o$ wird, so ist auch $y' - y = o$; folglich ist mn das Differential der Ordinate PM, oder $mn = dy$ (§. 302, b. Arithm.)

VI. Zusatz: Setzt man den Bogen $AM = Z$, $Am = Z'$, so ist Mm unendlich klein, mithin das Differential des Bogens AM, oder $Mm = dZ$. Eben so, wenn man die von der Abscisse, Ordinate und dem Bogen begränzte Fläche $AMP = R$, und $Amp = R'$ setzt, so ist PMmp eine unendlich kleine Größe, folglich das Differential

oder

oder Element der Fläche AMP, d. i. PMmp $=$ dR; denn Z, Z′ sowohl, als R, R′ sind Functionen von x, so daß $Z' - Z = 0$, und eben so $R' - R = 0$ wird, wenn $x' - x = 0$ ist.

VII. Zusatz: Im Kreise, wenn man nebst den Abscissen AP, Ap, und rechtwinklichten Ordinaten PM, pm, die Sehne Mm, und die Tangens TM zieht, bis letztere mit der verlängerten Ordinate pm in m′ zusammen stoßt, so ist pm′ ebenfalls eine Hilfsgröße, welche mit pm die gemeinschaftliche Gränze PM hat, also pm′ — pm eine unendlich kleine Größe (§. 295, III. Zus. Arithmet.), je näher nun pm, mithin auch pm′ ihre Gränze rücken, das ist, je kleiner der Kreisbogen Mm wird, desto mehr nähern sich die Puncte m und m′; an der Gränze selbst, wo also der Bogen wirklich unendlich klein, also eine verschwindende Größe ist (§. 295, Arithm.), fällt m′ mit m, folglich die Sehne Mm sowohl, als der kleine Theil Mm′ der Tangens mit dem Kreisbogen Mm zusammen, und das Gränzverhältniß dieser 3 Größen ist ein Verhältniß der Gleichheit, das heißt: ein unendlich kleiner Bogen des Kreises ist seiner Sehne sowohl, als einem unendlich kleinen Theile seiner Tangens gleich (§. 125, 126 und 271, Nr. 3. Geom.) Betrachtet man sie aber in einiger Entfernung von dieser Gränze, wo also pm und pm′ noch nicht mit PM zusammenfallen, so sind sie ungleich, aber ihr Unterschied

schied ist eine unendlich kleine Größe (§. 296, Arithm.). Wenn man daher in einer vollständigen oder unvollständigen Gleichung von diesen drey Stücken, nemlich von der Sehne Mm, dem Kreisbogen Mm, und dem Theilchen Mm' der Tangens, eines an die Stelle des andern setzt, so wird durch diese Substitution die Gleichung nicht falsch, sondern sie wird entweder eine vollständige, oder bleibt wenigstens eine unvollständige Gleichung (§. 299, Arithm.)

VIII. Zusatz: Zieht man im Kreise durch M zur Abscissenlinie AO die Parallele Mn, so rücken die beyden geradlinigten Dreyecke Mnm, Mnm' dem krummlinigten Mnm, dessen Seite der Kreisbogen Mm ist, um so näher, je näher pm', pm ihrer gemeinschaftlichen Gränze PM kommen, stellt man sich letztere an ihrer Gränze vor, so fallen erstere als verschwindende Größen zusammen; ausserhalb dieser Gränze aber ist der Unterschied dieser Dreyecke in Rücksicht der Seiten und ihrer Winkel sowohl, als ihres Flächeninhaltes eine unendlich kleine Größe; setzt man daher in einer Gleichung eines dieser Dreyecke an die Stelle des andern, so wird dadurch die Gleichung keine falsche, sondern bleibt wenigstens noch eine unvollständige Gleichung.

IX. Zusatz: Eben so verhält es sich im Kreise mit den beyden geradlinigten Trapezen PMmp, PMm'p

und

und dem krummlinigten Trapeze PMmp, von welchem eine Seite, nemlich Mm, ein unendlich kleiner Kreisbogen ist.

§. 234.

Aufgabe:

Aus der gegebenen Gleichung einer krummen Linie z. B. des Kreises, oder aus $y^2 = ax - x^2$, das Verhältniß der Differentiale der Abscissen und Ordinaten anzugeben.

I. Auflösung:

$y^2 = ax - x^2$, mithin

$2ydy = adx - 2xdx$ (§. 306, Arithm.), folglich

$$dy = \frac{adx - 2xdx}{2y} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}\, dx,$$

welche aber, so wie die vorhergehende eine vollständige Gleichung ist.

II. Auflösung: (Fig. 82)

1. Man ziehe die Ordinaten PM, pm, und den Radius $CM = \frac{1}{2}a$, wo a den Diameter bezeichnet.

2. Ferner ziehe man noch durch M mit Ap die Parallele Mn, so ist

3. $AP = x$, $Mn = Pp = dx$, $PM = y$, und $mn = dy$, $PC = AC - AP = \frac{1}{2}a - x$.

4. Nimmt man endlich den unendlich kleinen Bogen Mm als einen Theil der Tangens, also Mnm als ein geradlinigtes rechtwinklichtes Dreyeck, so ist

5. $\beta + \gamma = 90° = \alpha + \beta$; mithin $\gamma = \alpha$; ferner $n = P$, also $\triangle Mnm \sim \triangle MPC$, und

6. $Mn : mn = PM : PC$, oder
$dx : dy = y : \frac{1}{2}a - x$, folglich

$$7.\ dy = \frac{(\frac{1}{2}a - x)\,dx}{y} = \frac{a - 2x}{2y}\,dx.$$

8. Da man aber Nr. 4, Statt m'n die Linie mn, und Statt Mm' den Bogen Mm substituirt hat, so ist letztere Gleichung keine vollständige, aber doch auch keine falsche (§. 233, VII. Zus.), sondern eine unvollständige Gleichung.

Zusatz: Aus dem Verhältnisse der Differentialen von der Abscisse und Ordinate läßt sich umgekehrt die Gleichung der krummen Linie finden;

denn aus $dy = \frac{adx - 2xdx}{2y}$, wird

$$2ydy = adx - 2xdx, \text{ mithin}$$
$$\int 2ydy = \int (adx - 2xdx), \text{ oder}$$
$$y^2 = ax - x^2 + C \text{ (§. 326, Arithmetik).}$$

Da nun für $x = 0$; auch $y^2 = 0$ ist, so wird $0 = 0 - 0 + C$, mithin $C = 0$, folglich $y^2 = ax - x^2$; diese Gleichung, da sie

keine

keine Hilfsgrößen mehr enthält, ist eine vollständige (§. 301, Arithm.)

Anmerkung: Wenn in der Folge einer Größe das Zeichen d oder ∫ vorgesetzt ist, so bezeichnet erstere das Differential, letzteres das Integral dieser Größe, so wie C allemal die beständige Größe vorstellt.

§. 235.

Erklärung:

a) Eine krumme Linie heißt entweder algebraisch oder transcendent, je nachdem ihre Gleichung eine algebraische oder transcendente ist (§. 186, Arithm.)

b) Eine algebraische krumme Linie heißt eine Linie der zweyten, dritten, ... nten Ordnung, je nachdem ihre Gleichung eine von dieser Ordnung ist; das heißt, je nachdem der höchste Exponent einer veränderlichen Größe x, y oder die höchste Summe beyder Exponenten eines Gliedes, in der geordneten Gleichung einer algebraischen krummen Linie, 2, 3, ... oder n ist.

1. Zusatz: Die Gleichung $y^2 = ax - x^2$ gehört für eine Linie der zweyten, hingegen $y^2 = px^3$, so wie auch $a^2y + x^2y = ax^2$ für eine Linie der dritten Ordnung.

II. Zusatz: Die Gleichung; $y = a + bx + \frac{bx^2}{1 \cdot 2} + \frac{bx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{bx^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots\ldots + \frac{bx^\infty}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \infty}$ gehört für eine transcendente Linie.

II. Abschnitt.

Von trigonometrischen Differentialen, und von der Integration durch Kreisbögen.

§. 236.

Lehrsatz:

Wenn Z einen Kreisbogen für den Halbmesser a bezeichnet, so ist:

$$\text{I. } d \sin. Z = \frac{\cos. Z dZ}{a} = \frac{dz \text{ Cof. } Z}{a}$$

$$\text{II. } d \cos. Z = -\frac{\sin. Z dZ}{a}$$

Anmerkung: Um den Gegenstand aus mehrern Standpuncten dem Anfänger deutlich zu machen, setze ich zwey verschiedene Beweise aus.

I. Beweis:

1. Offenbar ist d sin. $Z = \sin.(Z + dZ) - \sin. Z$,
und $d \cos. Z = \cos.(Z + dZ) - \cos. Z$.

3. Beziehen sich nun *sin.*, *cos.* auf den Halbmesser $= 1$ gesetzt, so ist

3. $\sin.(Z + dZ) = \sin. Z \cos. dZ + \cos. Z \sin. dZ$
(§. 306, Trigonom.)
$\cos.(Z + dZ) = \cos. Z \cos. dZ - \sin. Z \sin. dZ$
(§. 308, Trigonom.)

4. Da aber sin., cos. für den Halbmesser $= a$ gehören, so ist

$$\sin.(Z + dZ) = \frac{\sin.(Z + dZ)}{a}; \text{ und}$$

$$\sin. Z \cos. dZ + \cos. Z \sin. dZ = \frac{\sin. Z \cos. dZ + \cos. Z \sin. dZ}{a^2}$$ (§. 305, II. Zusatz, Trigonom.) Eben so

$$\cos.(Z + dZ) = \frac{\cos.(Z + dZ)}{a}, \text{ und}$$

$$\cos. Z \cos. dZ - \sin. Z \sin. dZ = \frac{\cos. Z \cos. dZ - \sin. Z \sin. dZ}{a^2}$$, folglich diese Werthe Statt Nr. 3 gesetzt,

5. $$\sin.(Z + dZ) = \frac{\sin. Z \cos. dZ + \cos. Z \sin. dZ}{a}$$

$$\cos.(Z + dZ) = \frac{\cos. Z \cos. dZ - \sin. Z \sin. dZ}{a}$$

6.

6. Nun ist dZ unendlich klein, mithin wird sin. dZ $=$ dZ, und cos. dZ $=$ a; also

$$7.\ \text{sin.}(Z + dZ) = \frac{\text{sin. } Z \times a + \text{cos. } ZdZ}{a}$$

$$\text{cos.}(Z + dZ) = \frac{\text{cos. } Z \times a - \text{sin. } ZdZ}{a};$$

folglich aus Nr. 1.

$$8.\ d\ \text{sin. } Z = \frac{\text{sin. } Z \times a + \text{cos. } ZdZ}{a} - \text{sin. } Z$$

$$= \frac{\text{cos. } ZdZ}{a}$$

$$d\ \text{cos. } Z = \frac{\text{cos. } Z \times a - \text{sin. } ZdZ}{a}$$

$$-\text{cos. } Z = -\frac{\text{sin. } ZdZ}{a}$$

Diese beyden Gleichungen sind aber wegen der Substitution Nr. 6 unvollständige Gleichungen.

II. Beweis: (Fig. 83)

9. Man ziehe für den Bogen AB $=$ Z, seinen Sinus BE und Cosinus CE.

10. Nun wachse der Bogen um den beliebigen kleinen Theil Bb, und man ziehe den Sinus be des Bogens Ab $=$ Z', und durch B zu AC die Parallele Bm, so ist

11. der kleinere Bogen Bb $=$ Z' $-$ Z $=$ dZ; BE $=$ sin. Z; CE $=$ cos. Z; be $=$ sin. Z'; Ce $=$ cos. Z'; also

bm $=$ sin. Z' $-$ sin. Z $=$ d sin. Z, und

Bm

Bm = Ee = cos. Z — cos. Z′ = — (cos. Z′ — cos. Z)
= — d cos. Z. Ferner AC = BC = a.

12. Nun ist $\alpha + \beta = 90° = \beta + \gamma$, also $\alpha = \gamma$; m = E, folglich $\triangle$Bmb $\sim$ $\triangle$BEC, wo man den Bogen Bb als einen Theil der Tangens nimmt (§. 233, VII. Zus.), mithin

13. BC : CE = Bb : bm, oder
a : cos. Z = dZ : d sin. Z, mithin

$$\text{I. } d \sin. Z = \frac{\cos. Z dZ}{a}$$

14. Ferner: BC : BE = Bb : Bm,
oder a : sin. Z = dZ : — d cos. Z, also

$$-d \cos. Z = \frac{\sin. Z dZ}{a}, \text{ und}$$

$$\text{II. } d \cos. Z = -\frac{\sin. Z dZ}{a}, \text{ beyde Gleichungen}$$

aber sind unvollständige Gleichungen vermöge Nr. 12.

I. Zusatz: d . sin. vers. Z = d (a — cos. Z)
(§. 297, Trigon.) = — d cos. Z = $\frac{\sin. Z dZ}{a}$

II. Zusatz: d cos. vers. Z = d (a — sin. Z) = — d sin. Z
= — $\frac{\cos. Z dZ}{a}$

III.

III. Zusatz: Für den Halbmesser $a = 1$ wird

$$d \sin. Z = dZ \cos. Z;$$ und

$$d \cos. Z = - dZ \sin. Z;$$ also umgekehrt

$$\int dZ \cos. Z = \sin. Z + C,$$ und

$$\int dZ \sin. Z = - \cos. Z + C.$$

IV. Zusatz: Setzt man mZ Statt Z, so ist

$$d \sin. mZ = d(mZ) \cos. mZ = mdZ \cos. mZ,$$ und

$$bd Z \cos. mZ = \frac{bd \sin. mZ}{m};$$ folglich

$$\int bdZ \cos. mZ = \frac{b \sin. mZ}{m} + C.$$

V. Zusatz: Eben so ist:

$$d \cos. mZ = - d(mZ) \sin. mZ = - mdZ \sin. Zm,$$

$$\text{also } bd Z \sin. mZ = - \frac{bd \cos. mZ}{m};$$ folglich

$$\int bd Z \sin. mZ = - \frac{b . \cos mZ}{m} + C.$$

VI. Zusatz: $b \sin. Z^m \, d \sin. Z = bdZ \cos. Z \sin. Z^m$ (III. Zusatz),

also $\int bdZ \cos. Z \sin. Z^m = \frac{b \sin. Z^{m+1}}{m+1} + C$

(§. 324, Arithm.)

VII. Zusatz: $b \cos. Z^m \, d \cos. Z = - bdZ \sin Z \cos. Z^m$,

mithin

$$\int bdZ \sin. Z \cos. Z^m = - \frac{b \cos. Z^{m+1}}{m+1} + C.$$

VIII.

VIII. Zusatz:

$dZ \sin. mZ \cos. nZ = dZ [\frac{1}{2} \sin. (mZ + nZ) + \frac{1}{2} \sin. (mZ - nZ)]$ (§. 307, II. Zus. Trigon.) $= \frac{1}{2} dZ \sin. (m+n) Z + \frac{1}{2} dZ \sin. (m-n) Z$; folglich

$$\int dZ \sin. mZ \cos. nz = -\frac{\cos. (m+n) Z}{2(m+n)} - \frac{\cos. (m-n) Z}{2(m-n)} + C \text{ (V. Zus.)}$$

IX. Zusatz:

$dZ \sin. mZ \sin. nZ = dZ [\frac{1}{2} \cos. (mZ - nZ) - \frac{1}{2} \cos. (mZ + nZ)]$ (§. 309, III. Zus. Trigonom.) $= \frac{1}{2} dZ \cos. (m-n) Z - \frac{1}{2} dZ \cos. (m+n) Z$, folglich

$$\int dZ \sin. mZ \sin. nZ = \frac{\sin. (m-n) Z}{2(m-n)} - \frac{\sin. (m+n)}{2(m+n)} + C \text{ (IV. Zus.)}$$

X. Zusatz;

$dZ \cos. mZ \cos. nZ = dZ [\frac{1}{2} \cos. (mZ - nZ) + \frac{1}{2} \cos. (mZ + nZ)]$ §. 309, II. Zus. Trig.) $= \frac{1}{2} dZ \cos. (m-n) Z + \frac{1}{2} dZ \cos. (m+n) Z$;

$$\text{also } \int dZ \cos. mZ \cos. nZ = \frac{\sin. (m-n) Z}{2(m-n)} + \frac{\sin. (m+n)}{2(m+n)} + C \text{ (IV. Zusatz).}$$

§. 237.

Lehrsatz:

Für den Bogen Z und den Halbmesser a, ist

$$d\ tang.\ Z = \frac{a^2 dZ}{cos.\ Z^2}.$$

Beweis:

1. $d\ tang.\ Z = d\ \frac{a\ sin.\ Z}{cos.\ Z}$ (§. 301, Trigonom.)

$$= \frac{a\ cos.\ Z\ d\ sin.\ Z - a\ sin.\ Z\ d\ cos.\ Z}{cos.\ Z^2}$$

(§. 308, Arithmetik).

2. Nun ist $cos.\ Z\ d\ sin.\ Z = cos.\ Z, \frac{cos.\ Z dZ}{a}$

(§. 236), mithin $a\ cos.\ Z\ d\ sin.\ Z = cos.\ Z^2 dZ$.

3. Eben so $sin.\ Z\ d\ cos.\ Z = sin.\ Z \times -\frac{sin.\ Z dZ}{a}$, also

$-a\ sin.\ Z\ d\ cos.\ Z = sin.\ Z^2 dZ$, mithin Nr. 1.

$$4.\ d\ tang.\ Z = \frac{cos.\ Z^2\ dZ + sin.\ Z^2\ dZ}{cos.\ Z^2}$$

$$= \frac{(cos.\ Z^2 + sin.\ Z^2)\ dZ}{cos.\ Z^2} = \frac{a^2\ dZ}{cos.\ Z^2}$$

(§. 296, Trigonometrie).

§. 238.

Lehrsatz:

$d\ \text{cot.}\ Z = -\frac{a^2\,dZ}{\text{sin.}\ Z^2}$; wo Z den Bogen und a den Halbmesser bezeichnen.

Beweis:

1. $d\ \text{cot.}\ Z = d\frac{a\ .\ \text{cos.}\ Z}{\text{sin.}\ Z}$ (§. 303, Trigonom.)

$$= \frac{a\ \text{sin.}\ Z\ d\ \text{cos.}\ Z - a\ \text{cos.}\ Z.\ d\ \text{sin.}\ Z}{\text{sin.}\ Z^2}$$

(308, Arithmetik.)

2. Nun ist wieder aus §. 236

$a\ \text{sin.}\ Z\ d\ \text{cos.}\ Z = -\ \text{sin.}\ Z^2 dZ$, und

$-a\ \text{cos.}\ Z\ d\ \text{sin.}\ Z = -\ \text{cos.}\ Z^2 dZ$; mithin

3. $$d\ \text{cot.}\ Z = -\frac{\text{sin.}\ Z^2\ dZ + \text{cos.}\ Z^2 dZ}{\text{sin.}\ Z^2}$$

$$= -\frac{(\text{sin.}\ Z^2 + \text{cos.}\ Z^2)\,dZ}{\text{sin.}\ Z^2} = -\frac{a^2 dZ}{\text{sin.}\ Z^2}.$$

§. 239.

Lehrsatz:

Für den Bogen Z und Halbmesser a ist:

$$d\ \text{sec.}\ Z = \frac{\text{tang.}\ Z dZ}{\text{cos.}\ Z} = \frac{\text{tang.}\ Z\ \text{sec.}\ Z dZ}{a^2}$$

Beweis:

1. $d \text{ sec. } Z = d \frac{a^2}{\cos. Z}$ (§. 302, Trigonom.)

$= - \frac{a^2 d \cos. Z}{\cos. Z^2}$

2. Nun ist $d \cos. Z = - \frac{\sin. Z dZ}{a}$ (§. 236),

mithin $- a^2 d \cos. Z = a \sin. Z dZ$, folglich

3. $d \text{ sec. } Z = \frac{a \sin. Z dZ}{\cos. Z^2} = \frac{\text{tang. } Z dZ}{\cos. Z}$

(§. 301, Trigonometrie),

$= \text{tang. } Z dZ \times \frac{a^2}{a^2 \cos. Z} = \frac{\text{tang. } Z \text{ sec. } Z dZ}{a^2}$

(§. 302, Trigonometrie).

§. 240.

Lehrsatz:

Für den Halbmesser a ist

$$d \text{ cosec. } Z = - \frac{\text{cot. } Z dZ}{\sin. Z}$$

$$= - \frac{\text{cot. } Z \text{ cosec. } Z dZ}{a^2}.$$

Beweis:

1. $d \text{ cosec. } Z = d \frac{a^2}{\sin. Z}$ (§. 304, Trigonom.)

$$= - \frac{a^2 \, d \sin. Z}{\sin. Z^2}$$

2. mithin d cosec. $Z = - \frac{a \cos. Z dZ}{\sin. Z^2}$ (§. 236).

$$= - \frac{\cot. Z dZ}{\sin. Z} = - \cot. Z dZ \times \frac{a^2}{a^2 \sin. Z}$$

$$= - \frac{\cot. Z \, \text{cosec}. Z dZ}{a^2}$$

§. 241.

Lehrsatz:

Wenn x den Sinus des Bogens Z vom Halbmesser a ausdrückt, so ist

$$d \, (\text{Arc. sin. } x) = a dx \, (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Beweis:

1. d sin. $Z = \frac{\cos. Z dZ}{a}$ (§. 236)

$$= \frac{dZ \sqrt{(a^2 - \sin. Z^2)}}{a}$$ (§. 296, Trigonom.)

2. Wenn nun $x = \sin. Z$; so ist $Z = \text{Arc. sin. } x$, das heißt, Z ist der Bogen, welchem x als Sinus für den Halbmesser a entspricht;

3. Ferner d sin. $Z = dx$; und $dZ = d \, (\text{Arc. sin. } x)$.

4. Setzt man diese Werthe in der Gleichung Nr. 1; so wird

5. $dx = \frac{d\,(\text{Arc. sin, } x)\ \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$, folglich

6. $d\,(\text{Arc. sin. } x) = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$

$= adx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 104, III. Zuſ. Arithm.)

I. Zuſatz: $\int adx\ (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc sin. } x + C.$

II. Zuſatz: In der vorhergehenden Formel bezieht ſich Arc. auf einen Kreis, deſſen Halbmeſſer $= a$ iſt. Drückt nun arc. den Bogen eines Kreiſes aus, deſſen Radius $= 1$ iſt, ſo wird

$$\text{Arc. sin. } x = a \,.\, \text{arc. sin. } \frac{x}{a}$$

Denn Z' bezeichne einen Bogen, und x' den Sinus desſelben, für den Halbmeſſer $= 1$, ſo daß Z' mit Z gleich viele Grade hält, ſo iſt $x' = \text{sin. } Z'$; und $Z' = \text{arc. sin. } x'$.

Ferner $x' : x = 1 : a$ (§. 305, Trig.), mithin

$$x' = \frac{x}{a};\ \text{alſo } Z' = \text{arc. sin. } \frac{x}{a};$$

Endlich $Z : Z' = a : 1$ (§. 126, IV. Zuſatz. Geometrie), folglich $Z = aZ'$; das iſt:

$$\text{Arc. sin. } x = a \,.\, \text{arc. sin. } \frac{x}{a}$$

III. Zuſatz: Wenn arc. ſich auf einen Kreis bezieht, deſſen Halbmeſſer $= 1$ iſt, ſo wird

$\int dx$

$$\int dx\ (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{arc. sin.}\ \frac{x}{a} + C;$$ denn

$$\int a\,dx\ (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc. sin.}\ x + C$$ (I. Zuſ.)

$$= a\ .\ \text{arc. sin.}\ \frac{x}{a} + C$$

(II. Zuſatz), mithin

$$\int dx\ (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{arc. sin.}\ \frac{x}{a} + C.$$

IV. Zuſatz: $\int bx^o dx\ (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = b\ .\ \text{arc. sin.}\ \frac{x}{a} + C.$

§. 242.

Aufgabe:

Wenn $a = 24$, $b = 2$; $x = 18$; nebſt der Differentialgleichung $dZ = bx^o dx\ (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ gegeben iſt, die Größe Z anzugeben.

Auflöſung:

1. Da $\int bx^o dx\ (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = b\ .\ \text{arc. sin.}\ \frac{x}{a} + C$ (§. 241, IV. Zuſ.), ſo iſt

$$Z = b\ .\ \text{arc. sin.}\ \frac{x}{a} + C.$$

2. Wenn nun bekannt iſt, daß für $x = .o$ auch $Z = o$ wird, ſo iſt ebenfalls $C = o$, mithin

3. $Z = b \cdot \text{arc. sin.} \frac{x}{a}$.

4. Nun ist $\frac{x}{a} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0{,}7500000$.

5. Diesem Sinus entspricht aber aus den Tabellen für den Halbmesser 1 ein Bogen von 48°36′.

6. Für eben den Halbmesser 1 ist aber die Länge dieses Bogens; oder arc. 48° = 0,837758
arc. 36′ = 0,010471

mithin arc. sin. $\frac{x}{a} = 0{,}848229$;

folglich

6. $b \cdot \text{arc. sin.} \frac{x}{a} = 2 \times 0{,}848229$, das ist

$Z = 1{,}696458$

§. 243.

Lehrsatz:

Wenn x für den Halbmesser a den Cosinus des Kreisbogens Z ausdrückt, so ist:

$$d\,(\text{Arc. cos. } x) = -\,adx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Beweis:

1. $$d \cos. Z = -\frac{\sin. Z dZ}{a} \quad (\S.\ 236)$$

$$= -\frac{dZ \sqrt{(a^2 - \cos. Z^2)}}{a}.$$

2. Nun ist cos. $Z = x$; also $z =$ Arc. cos. x, mithin $d \cos. Z = dx$; $dZ = d$ (Arc. cos. x), folglich giebt die vorhergehende Gleichung:

3. $dx = -\frac{d\ (\text{Arc. cos. } x)\ \sqrt{(a^2 - x2)}}{a}$,

mithin

4. $d\ (\text{Arc. cos. } x) = -\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$

$= -adx\ (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

I. Zusatz: $\int -adx\ (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc. cos. } x + C.$

II. Zusatz: Wenn nun arc. den Bogen für den Radius $= 1$ bezeichnet, so ist aus den nemlichen Gründen, wie §. 241, II. Zusatz

$\text{Arc. cos. } x = a \,.\, \text{arc. cos. } \frac{x}{a}$, also

III. Zusatz: $\int -adx\ (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = a \,.\, \text{arc. cos. } \frac{x}{a} + C$, oder

$\int -dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{arc. cos. } \frac{x}{a} + C$; folglich

IV. Zusatz: $\int -bx^o dx\ (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= b \,.\, \text{arc. cos. } \frac{x}{a} + C.$

§. 244.

Lehrsatz:

Wenn x die Tangens des Bogens Z für den Halbmesser a ausdrückt, so ist:

$$d\,(\text{Arc. tang. } x) = a^2 dx\,(a^2 + x^2)^{-1}.$$

Beweis:

1. $d\ \text{tang. } Z = \frac{a^2 dZ}{\cos. Z^2}$ (§. 237).

2. Ferner ist $\text{tang. } Z^2 = \frac{a^2 \text{ fin. } Z^2}{\cos. Z^2}$ (§. 301, Trigonometrie)

$$= \frac{a^2\,(a^2 - \cos. Z^2)}{\cos. Z^2},$$

mithin,

$\text{tang. } Z^2 \cos. Z^2 = a^4 - a^2 \cos. Z^2$;

$\cos. Z^2\,(a^2 + \text{tang. } Z^2) = a^4$; also

3. $\cos. Z^2 = \frac{a^4}{a^2 + \text{tang. } Z^2}$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung Nr. 1, so wird

4. $d\ \text{tang. } Z = a^2\ dZ \times \frac{a^2 + \text{tang. } Z^2}{a^4}$

$$= \frac{dZ\,(a^2 + \text{tang. } Z^2)}{a^2}$$

5. Nun ist tang. $Z = x$; also $Z =$ Arc. tang x; mithin d tang. $Z = dx$; $dZ = d$ (Arc. tang. x), also

6. $dx = \frac{d\,(\text{Arc. tang. } x)\,(a^2 + x^2)}{a^2}$; folglich

7. $d\,(\text{Arc. tang. } x) = \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2}$

$= a^2 dx\,(a^2 + x^2)^{-1}$.

I. Zusatz: $\int a^2 dx\,(a^2 + x^2)^{-1} =$ Arc. tang $x + C$.

II. Zusatz: Will man den Bogen für den Halbmesser 1 oder arc. setzen, so ist wie §. 241, II. Zus.

Arc. tang. $x = a$. arc. tang. $\frac{x}{a}$, also

III. Zusatz: $\int a^2 dx\,(a^2 + x^2)^{-1}$

$= a$. arc. tang. $\frac{x}{a} + C$, oder

$\int dx\,(a^2 + x^2)^{-1} = \frac{1}{a}$ arc. tang. $\frac{x}{a} + C$,

folglich

IV. Zusatz: $\int bx^0\,dx\,(a^2 + x^2)^{-1} = \frac{b}{a}$

arc. tang. $\frac{x}{a} + C$.

§. 245.

Lehrsatz:

Wenn x die Cotangens des Bogens Z für den Halbmesser a bezeichnet, so ist

$$d\,(\text{Arc. cot. } x) = -\,a^2 dx\,(a^2 + x^2)^{-1}.$$

Beweis:

1. $d \cot. Z = -\dfrac{a^2\,dZ}{\text{sin. } Z^2}$ (§. 238).

2. Ferner ist $\cot. Z^2 = \dfrac{a^2 \cos. Z^2}{\text{sin. } Z^2}$ (§. 303,

$$= \frac{a^2(a^2 - \text{sin.} Z^2)}{\text{sin. } Z^2}, \text{ also}$$

$\cot. Z^2 \text{ sin. } Z^2 = a^4 - a^2 \text{ sin. } Z^2$, und

$\text{sin. } Z^2 (a^2 + \cot. Z^2) = a^4$, mithin

3. $\text{sin. } Z^2 = \dfrac{a^4}{a^2 + \cot. Z^2}$, folglich Nr. 1

4. $d \cot. Z = -\,a^2 dZ \times \dfrac{a^2 + \cot. Z^2}{a^4}$

$$= -\,\frac{dZ\,(a^2 + \cot. Z^2)}{a^2}$$

5. Nun ist $\cot. Z = x$; also $Z = \text{Arc. cot. } x$, und $d \cot. Z = dx$; $dZ = d\,(\text{Arc. cot. } x)$, folglich

6. $dx = -\,\dfrac{d\,(\text{Arc. cot. } x)\,(a^2 + x^2)}{a^2}$, und

7.

$$7.\ d\ (\text{Arc. cot. } x) = -\frac{a^2\,dx}{a^2 + x^2}$$

$$= -\,a^2 dx\ (a^2 + x^2)^{-1}.$$

I. Zusatz: $\int -a^2 dx\ (a^2 + x^2)^{-1} = \text{Arc. cot. } x + C.$

II. Zusatz: Drückt arc. einen Bogen für den Halbmesser 1 aus, so ist Arc. cot. $x = a$. arc. cot. $\frac{x}{a}$ (§. 241, II. Zusatz), mithin

III. Zusatz: $\int -a^2 dx\ (a^2 + x^2)^{-1}$

$= a$. arc. cot. $\frac{x}{a} + C$, oder

$\int -dx\ (a^2 + x^2)^{-1} = \frac{1}{a}$ arc. cot. $\frac{x}{a}$

$+ C$; folglich

IV. Zusatz: $\int -b dx\ (a^2 + x^2)^{-1} = \frac{b}{a}$

arc. cot. $\frac{x}{a} + C.$

§. 246.

Lehrsatz:

Wenn x die Secans des Bogens Z für den Halbmesser a bezeichnet, so ist:

$$d\,(\text{Arc. sec. } x) = a^2 x^{-1}\,dx\,(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Beweis:

$$1.\ d\ \text{sec. } Z = \frac{dZ\ \text{tang. } Z\ \text{sec. } Z}{a^2}\ (\S.\ 239)$$

$$= \frac{dZ\ \text{sec. } Z \sqrt{\ (\text{sec. } Z^2 - a^2)}}{a^2}$$

(§. 300, Trigonometrie).

2. Nun ist sec $Z = x$; also $Z =$ arc. sec. x, und

$$d\ \text{sec. } Z = dx;\quad dZ = d\,(\text{Arc. sec. } x),$$

mithin

$$3.\ dx = \frac{d\,(\text{Arc. sec. } x)\ x \sqrt{\ (x^2 - a^2)}}{a^2};\ \text{folglich}$$

$$4.\ d\,(\text{Arc. sec. } x) = \frac{a^2\,dx}{x \sqrt{\ (x^2 - a^2)}}$$

$$= a^2 x^{-1}\,dx\,(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

I. Zusatz: $\int a^2 x^{-1}\,dx\,(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \text{Arc. sec. } x + C.$$

II. Zusatz: Will man arc., das ist, den Bogen für den Halbmesser 1 substituiren, so ist wieder (§. 241, II. Zus.) Arc. sec. $x = a$. arc. sec. $\frac{x}{a}$

mithin

III. Zusatz: $\int a^2 x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= a$. arc. sec. $\frac{x}{a} + C$, oder

$$\int x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}$$

arc. sec. $\frac{x}{a} + C$.

IV. Zusatz: Wenn nun $Z' =$ arc. sec. $\frac{x}{a}$ gesetzt wird, so ist $\frac{x}{a} =$ sec. $Z' = \frac{1}{\cos. Z'}$ (§. 302, Trigonometrie), mithin

cos. $Z' = \frac{a}{x}$, und folglich

$Z' =$ arc. cos. $\frac{a}{x} =$ arc. sec. $\frac{x}{a}$; mithin

V. Zusatz: $\int x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}$

arc. cos. $\frac{a}{x} + C$, und

VI. Zusatz: $\int b x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{b}{a}$ arc. sec. $\frac{x}{a} + C$.

$= \frac{b}{a}$ arc. cos. $\frac{a}{x} + C$.

§. 247.

Lehrsatz:

Wenn x die Consecans des Bogens Z für den Halbmesser a ausdrückt, so ist:

$$d\,(\text{Arc. cosec. } x) = -\,a^2 x^{-1}\,dx\,(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Beweis:

1. $d\,\text{cosec. } Z = -\,\dfrac{dZ\,\text{cosec. } Z\,\text{cot. } Z}{a^2}$ (§. 240)

$$= -\,\frac{dZ\,\text{cosec. } Z\sqrt{(\text{cosec. } Z^2-a^2)}}{a^2}$$

(§. 304, Trigonometrie).

2. Nun ist $\text{cosec. } Z = x$; also $Z = \text{Arc. cosec. } x$, und $d\,\text{cosec. } Z = dx$; $dZ = d\,(\text{Arc. cosec. } x)$, mithin

3. $$dx = -\,\frac{d\,(\text{Arc. cosec. } x)\,x\sqrt{(x^2-a^2)}}{a^2};$$

folglich

4. $$d\,(\text{Arc. cosec. } x) = -\,\frac{a^2\,dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

$$= -\,a^2 x^{-1}\,dx\,(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

I. Zusatz: $\int -\,a^2 x^{-1}\,dx\,(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \text{Arc. cosec. } x + C.$

II. Zusatz: Will man arc., das ist, den Bogen für den Halbmesser 1 substituiren, so ist

Arc. cosec. $x = a$. arc. cosec. $\frac{x}{a}$, mithin

III. Zusatz: $\int - a^2 x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= a$ arc. cosec. $\frac{x}{a} + C$, oder

$$\int - x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}$$

arc. cosec. $\frac{x}{a} + C$.

IV. Zusatz: Setzt man $Z' =$ arc. cosec. $\frac{x}{a}$;

mithin $\frac{x}{a} =$ cosec. $Z' = \frac{1}{\text{sin. } Z'}$ (§. 304, Trigonometrie), also

sin. $Z' = \frac{a}{x}$; so ist

$Z' =$ arc. sin. $\frac{a}{x} =$ arc. cosec. $\frac{x}{a}$,

folglich

V. Zusatz: $\int - x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{a}$ arc. sin. $\frac{a}{x} + C$, und

VI. Zusatz: $\int - bx^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{b}{a}$ arc. cosec. $\frac{x}{a} + C$.

$= \frac{b}{a}$ arc. sin. $\frac{a}{x} + C$.

§. 248.

Lehrsatz:

Wenn x, den Sinusversus des Bogens Z für den Halbmesser a bezeichnet, so ist:

$$d\,(\text{Arc. sin. vers. } x) = a x^{-\frac{1}{2}} dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= a x^{-1}\,dx\,(2a x^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Beweis:

1. $d \text{ sin. vers. } Z = \frac{dZ \text{ sin. } Z}{a}$ (§. 236. I. Zus.)
$$= \frac{dZ \sqrt{(a^2 - \cos. Z^2)}}{a}$$

2. Nun ist $\cos. Z = a - \text{sin. vers. } Z$ (§. 297. Trigon.
also $\cos. Z^2 = a^2 - 2a \text{ sin. vers. } Z + \text{sin. vers. } Z^2$, mithin
$a^2 - \cos. Z^2 = 2a \text{ sin. vers. } Z - \text{sin. vers. } Z^2$
folglich

3. $d \text{ sin. vers. } Z = \frac{dZ \sqrt{(2a \text{ sin. vers. } Z - \text{sin. vers} Z^2)}}{a}$

4. Ferner ist sin. vers $Z = x$, also $Z =$ Arc. sin. vers. x, und
$d \text{ sin. vers. } Z = dx$; $dZ = d(\text{Arc. sin vers. } x)$
folglich

5. $dx = \frac{d\,(\text{Arc. sin. vers. } x) \sqrt{(2ax - x^2)}}{a}$ und

6. $d\,(\text{Arc. sin. vers. } x) = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$

$= adx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= ax^{-\frac{1}{2}} dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 329. Arithm.)

$= ax^{-1} dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 330. Arithm.)

I. Zusatz: $\int adx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int ax^{-\frac{1}{2}} dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int ax^{-1} dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$=$ Arc. sin. vers. $x + C$

II. Zusatz: Wenn man arc. oder den Bogen für den Halbmesser 1 setzt, so ist Arc. sin. vers. x

$= a$ arc sin. vers. $\frac{x}{a}$

folglich

III. Zusatz: $\int ax^{-1} dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$=$ a. arc. sin. vers. $\frac{x}{a}$, und

$\int dx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int x^{-1} dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$=$ arc. sin. vers. $\frac{x}{a} + C$,

IV. Zusatz: Nun setze man $Z' = \text{arc. sin. vers.} \frac{x}{a}$

also

$\frac{x}{a} = \text{sin. vers. } Z' = 1 - \cos. Z'$, mithin

$\cos. Z' = 1 - \frac{x}{a} = 1 - \frac{2x}{2a}$; folglich

$Z' = \text{arc. cos.} \left(1 - \frac{2x}{2a}\right) = \text{arc. sin. vers.} \frac{x}{a}$

Setzt man endlich noch $2a = c$, so wird

V. Zusatz: $\int dx\,(cx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(c - x)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int x^{-1}\,dx\,(cx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$= \text{arc, cos.} \left(1 - \frac{2x}{c}\right) + C$; folglich

VI. Zusatz: $\int b\,dx\,(cx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int bx^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(c - x)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int bx^{-1}\,dx\,(cx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$= b \text{ arc. cos.} \left(1 - \frac{2x}{c}\right) + C$

§. 249.

Lehrsatz:

Wenn x den Cosinusversus des Bogens Z für den Halbmesser a bezeichnet, so ist:

$$\frac{x}{\quad} \; d\,(\text{Arc. cos. vers. } x) = -\, a\,dx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\, a x^{-\frac{1}{2}}\, dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\, a x^{-1}\, dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Beweis:

1. d cos. vers. $Z = -\dfrac{dZ \cos Z}{a}$ (§. 236. II. Zuſ.)

$$= -\frac{dZ\sqrt{(a^2 - \text{ſin. } Z^2)}}{a}$$

2. Nun iſt ſin. $Z =$ a — cos. vers. Z, alſo
ſin $Z^2 = a^2 - 2a$ cos. vers. $Z +$ cos. vers. Z^2, und
$a^2 -$ ſin. $Z^2 = 2a$ cos. vers. $Z -$ cos. vers. Z^2
mithin

3. d cos. vers. Z

$$= -\frac{dZ\sqrt{(2a \text{ cos. vers. } Z - \text{ cos. vers. } Z^2)}}{a}$$

4. Ferner iſt cos. vers. $Z = x$, alſo
$Z =$ Arc. cos. vers. x, und d cos. vers. $Z = dx$;
$dZ = d\,(\text{Arc. cos. vers. } x)$, folglich

$$5.\; dx = -\frac{d\,(\text{Arc. cos. vers. } x)\sqrt{(2ax - x^2)}}{a}$$

und

$$6.\; d(\text{Arc. cos. vers. } x) = -\frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

$$= -\, a\,dx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\, a x^{-\frac{1}{2}}\, dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}} \text{ (§. 329. Arith.)}$$

$$= -\, a x^{-1}\, dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

(§ 330. Arithm.)

I. Zusatz: $\int -adx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$= \text{Arc. cos. vers-}\ x + C$

II. Zusatz: Nimmt man den Bogen für den Halbmesser $= 1$ oder arc.; so ist Arc. cos. vers. x
$= \text{a. arc. cos, vers.}\ \frac{x}{a}$, also

III. Zusatz: $\int -adx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$= a\ \text{arc. cos. vers.}\ \frac{x}{a} + C$; und
$\int -dx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$= \int -x^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}}$
$= \int -x^{-1}\,dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$
$= \text{arc. cos. vers.}\ \frac{x}{a} + C$

IV. Zusatz: Nun setze man $Z' = \text{arc. cos. vers.}\ \frac{x}{a}$
also
$\frac{x}{a} = \text{cos. vers.}\ Z' = 1 - \text{sin. } Z'$, so ist
$\text{Sin. } Z' = 1 - \frac{x}{a} = 1 - \frac{2x}{2a}$; folglich
$Z' = \text{arc. sin.}\left(1 - \frac{2x}{2a}\right) = \text{arc. cos. vers.}\ \frac{x}{a}$
Setzet man endlich noch $2a = c$, so wird

V.

V. Zusatz: $\int - dx\,(cx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int - x^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(c - x)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int - x^{-1}\,dx\,(cx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$= \text{arc. sin.}\left(1 - \frac{2x}{c}\right) + C$; folglich

VI. Zusatz: $\int - b\,dx\,(cx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int - bx^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(c - x)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int - bx^{-1}\,dx\,(cx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$= b\ \text{arc. sin.}\left(1 - \frac{2x}{c}\right) + C$

§. 250.

Lehrsatz:

$$\int dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,a^2\ \text{arc. sin.}\ \frac{x}{a} + \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{(a^2 - x^2)} + C$$

Beweis:

1. $dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$+ \frac{1}{2}\,dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

2. ferner $\frac{1}{2}\,dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{\frac{1}{2}\,dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{\frac{1}{2}\,dx\,(a^2 - x^2)}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\,a^2\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$- \frac{1}{2}\,x^2\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

3. Subſtituirt man dieſe Werthe ſtatt des lezten Gliedes in der Gleichung Nro 1, ſo wird

4. $\int dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \int [\frac{1}{2} dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$
$- \frac{1}{2} x^2\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}] + \int \frac{1}{2} a^2 dx (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

5. $\int \frac{1}{2}\,a^2\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,a^2$ arc. fin. $\frac{x}{a}$
(§. 241. IV. Zuſ.)

6. Ferner $d(\frac{1}{2} x \sqrt{(a^2 - x^2)}) = \frac{1}{2}\,dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$
$- \frac{1}{2}\,x^2\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 307. Arithm.)
alſo umgekehrt

7. $\int [\frac{1}{2}\,dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^2\,dx (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}]$
$= \frac{1}{2}\,x \sqrt{(a^2 - x^2)}$, folglich

8. $\int dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,a^2$ arc. fin. $\frac{x}{a}$
$+ \frac{1}{2}\,x \sqrt{(a^2 - x^2)} + C$

I. Zuſatz: $\int bx^o\,dx (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,a^2\,b$ arc. fin. $\frac{x}{a}$
$+ \frac{1}{2}\,bx \sqrt{(a^2 - x^2)} + C$

II. Zuſatz: $\int - dx\,(2\,ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2}\,a^2$ arc. fin. $(1 - \frac{2x}{2a})$
$+ \frac{1}{2}\,(a - x) \sqrt{(2ax - x^2)} + C.$

Denn

Denn man ſetze $x = a - y$; alſo $y = a - x$;
$dy = -dx$; $2ax = 2a^2 - 2ay$
$x^2 = a^2 - 2ay + y^2$; alſo
$2ax - x^2 = a^2 - y^2$; folglich

$$\int -dx\,(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \int dy\,(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. ſin. } \frac{y}{a} + \tfrac{1}{2}y\sqrt{(a^2 - y^2)} \quad \text{(Lehrſ.)}$$

Subſtituirt man wieder ſtatt y deſſen Werth, ſo wird

$$\int -dx\,(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. ſin. } \frac{a-x}{a}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{(2ax - x^2)} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. ſin. } (1 - \frac{2x}{2a})$$

$$+ \tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{(2ax - x^2)} + C$$

$$= \tfrac{1}{8}4a^2 \text{ arc. ſin. } (1 - \frac{2x}{2a})$$

$$+ \tfrac{1}{8}(4a - 4x)\sqrt{(2ax - x^2)} + C$$

III. Zuſatz: Wenn man in der letzten Gleichung $2a = c$ ſetzt, ſo wird

$$\int -dx\,(cx - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{8}c^2 \text{ arc. ſin. } (1 - \frac{2x}{c})$$

$$+ \tfrac{1}{8}(2c - 4x)\sqrt{(cx - x^2)} + C; \text{ folglich}$$

IV. Zuſatz: $\int -bx^0\,dx\,(cx - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= \int -bx^{\frac{1}{2}}\,dx\,(c - x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int -bxdx\,(cx^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{8}bc^2 \text{ arc. ſin. } (1 - \frac{2x}{c})$$

$$+ \tfrac{1}{8}b\,(2c - 4x)\sqrt{(cx - x^2)} + C$$

§. 251.

§. 251.

Lehrsatz:

$$\int -dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,a^2 \text{ arc. cos. } \frac{x}{a} - \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{(a^2-x^2)} + C$$

Beweis:

1. $-dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2}dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$

2. Ferner $-\tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= -\frac{\tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{\tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2-x^2)}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\tfrac{1}{2}\,a^2\,dx\,(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\,x^2\,dx\,(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

3. Setzet man diese Werthe statt des letzten Gliedes Nro. 1. so wird

$$4.\ \int -dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \int\left[-\tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\,x^2\,dx\,(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] + \int -\tfrac{1}{2}\,a^2\,dx\,(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

5. Nun ist $\int -\tfrac{1}{2}\,a^2\,dx\,(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \tfrac{1}{2}\,a^2$ arc. cos. $\frac{x}{a}$ (§. 243. IV. Zus.)

6.

6. Ferner ist:

$$d(-\tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)}) = -\tfrac{1}{2}dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\tfrac{1}{2}x^2\,dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$ also auch umgekehrt

7. $\int[-\tfrac{1}{2}dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}x^2dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}]$
$= -\tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)}$;

8. Setzt man die N. 5. und 7. gefundenen Werthe in die Gleichung N. 4.; so ist

9. $\int -dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}a^2$ arc. cos. $\frac{x}{a}$
$-\tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)} + C.$

I. Zusatz: $\int -bx^o\,dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}a^2b.\text{arc.cos.}\frac{x}{a}$
$-\tfrac{1}{2}bx\sqrt{(a^2-x^2)} + C$

II. Zusatz: $\int dx(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}a^2\text{arc.cos.}(1-\frac{2x}{2a})$
$-\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{(2ax-x^2)} + C$

Denn man setze $x = a-y$; also $y = a-x$;
$dx = -dy$;

$2ax = 2a^2 - 2ay$
$x^2 = a^2 - 2ay + y^2$, mithin
$2ax - x^2 = a^2 - y^2$; folglich

$\int dx(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}} = \int -dy(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$
$= \tfrac{1}{2}a^2$ arc. cos. $\frac{y}{a} - \tfrac{1}{2}y\sqrt{(a^2-y^2)}$ (Lehrsatz.)

Enb-

Subſtituirt man für y deſſen Werth $a - x$, ſo iſt

$$\int dx\,(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,a^2 \text{ arc. cos. } \frac{a-x}{a} - \tfrac{1}{2}\,(a-x)\sqrt{(2ax - x^2)} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\,a.^2 \text{ arc. cos. } (1 - \frac{2x}{2a}) - \tfrac{1}{2}\,(a-x)\sqrt{(2ax - x^2)} + C.$$

$$= \tfrac{1}{8}\,4\,a^2 \text{ arc. cos. } (1 - \frac{2x}{2a}) - \tfrac{1}{8}\,(4a - 4x)\sqrt{(2ax - x^2)} + C$$

III. Zuſatz: Wenn man in der letzten Gleichung $2a = c$ ſetzt, ſo wird:

$$\int dx\,(cx - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{8}\,c^2 \text{ arc.cos. } (1 - \frac{2x}{c}) - \tfrac{1}{8}\,(2c - 4x)\sqrt{(cx - x^2)} + C;$$

folglich

IV. Zuſatz:

$$\int bx^0\,dx\,(cx - x^2)^{\frac{1}{2}} = \int bx^{\frac{1}{2}}\,dx\,(c-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int bx\,dx\,(cx^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{8}\,bc^2 \text{arc.cos.} (1 - \frac{2x}{c}) - \tfrac{1}{8}\,b\,(2c - 4x)\sqrt{(cx - x^2)} + C$$

§. 252.

Zur leichtern Anwendung der bisher angeführten Differential- und Integralformeln ſtellt erſtere die am Ende beygefügte Vte Tabelle, und die VIte Tabelle daſelbſt letztere zuſammen dar.

III. Abschnitt.

Von den Verhältnissen krummer Linien überhaupt.

§. 253.

Erklärungen: (Fig. 84.)

a) Eine gerade Linie TQ, welche mit dem Bogen einer krummen Linie ab einen Punct M so gemein hat, daß die beyden Theile Ma, Mb derselben auf einer Seite dieser geraden Linie liegen, heißt eine **Tangens** der krummen Linie.

b) Zieht man die Sehnen aM, bM, so ist der Bogen AB nach jener Seite zu **hohl** (concavus), nach welcher die beyden Sehnen einen hohlen Winkel einschliessen, und der andern Seite zu, so wie der Winkel **erhaben** (arcus convexus).

I. **Zusatz:** Wenn man die Sehne ab zieht, so kehrt der Bogen aMB seine hohle Seite dieser Sehne, und seine erhabene der Tangens TQ zu.

II. **Zusatz:** Schneidet die Tangens irgendwo die krumme Linie, oder wendet letztere ihre hohle Seite der Tangens zu, so giebt es einen **Wendungspunct** (punctum flexus contrarii), wo der Bogen nach jener Gegend zu hohl wird, nach welcher er vorher erhaben war.

III. Zusatz: Wenn man durch M auf die Tangens TQ einen Perpendikel MN nach der hohlen Seite des Bogens zu errichtet, und aus den beliebigen Puncten N, C desselben mit NM, CM Kreise beschreibt, so gehen sie beyde durch den Punct M der krummen Linie, TQ ist ihre gemeinschaftliche Tangens, sie sind also Berührungskreise, von welchen der Kreis mit dem kleinern Halbmesser NM bey M eine größere Krümmung hat, als der Bogen des Kreises vom größern Halbmesser CM (§. 111. Lehrs. nebst III. und IV. Zus. Geom.)

IV. Zusatz: Da unendlich viele solche Berührungskreise auf der hohlen Seite der gegebenen krummen Linie AB möglich sind, und da jeder davon bey M eine andere Krümmung hat, so giebt es unter diesen Kreisen einen, welcher bey M mit der gegebenen krummen Linie die nemliche Krümmung hat, das ist ein unendlich kleiner Theil der krummen Linie fällt mit einem unendlich kleinen Bogen des Berührungskreises bey M zusammen.

§. 254.

Erklärungen: (Fig. 85.)

a) Wenn der aus C mit CM beschriebene Kreis bey M mit der krummen Linie AB einerley Krümmung hat, so heißt solcher der **Krümmungskreis** (circulus curvaturae, circulus osculator) für den Punct M der krummen Linie, und

b)

b) dessen Halbmesser CM der **Krümmungshalbmesser** (radius curvaturae, radius osculi) der krummen Linie AB am Puncte M.

I. Zusatz: Da von der krummen Linie AB, wenn sie nicht selbst eine Kreislinie ist, nicht alle Puncte in die Peripherie eines Kreises fallen können, so gehören zu verschiedenen Stellen der krummen Linie verschiedene Krümmungskreise. Je weiter daher der Punct m von M entfernt ist, desto weiter entfernt sich solcher von der Peripherie des Krümmungskreises für den Punct M, und je näher in der krummen Linie der Punct m dem Puncte M angenommen wird, desto näher liegt er dem Umfange des Krümmungskreises für den Punct M, nur wenn der Punct m dem Puncte M unendlich nahe liegt, so fällt der unendlich kleine Bogen Mm der krummen Linie mit einem unendlich kleinen Theil der Peripherie des Krümmungskreises zusammen, und die beyden uuendlich kleinen Bögen sind weder der Lage noch Grösse nach verschieden, ihre gemeinschaftliche Gränze ist o; nur an dieser Gränze, wenn man sich die beyden Bögen vorstellt, sind sie einander vollkommen gleich, ausser derselben sind sie verschieden, aber ihr Unterschied ist eine unendlich kleine Grösse (§. 295. Arithm.)

II. Zusatz: Wenn man vom Mittelpunct C des Krümmungskreises nach dem Punct m der krummen

men Linie, die gerade Cm zieht, so ist Cm — CM eine unendlich kleine Größe, man kann daher in einer gegebenen Gleichung statt Cm die Linie CM, und umgekehrt setzen, ohne daß dadurch die Gleichung falsch wird (§. 299. Arithm.)

III. Zusatz: Da jeder unendlich kleine Theil einer krummen Linie dem unendlich kleinen Bogen seines Krümmungskreises gleich ist, so gelten für jede krumme Linie alle Zusätze des 233. §.

IV. Zusatz: Der Krümmungshalbmesser für den Punct M der krummen Linie AB steht durch eben diesen Punct auf der Tangens, folglich auch auf dem Bogen senkrecht; wenn man daher für einen gegebenen Punct M der krummen Linie die Tangens TQ, und durch M nach der hohlen Seite zu auf diese Tanges einen Perpendikel MN zieht, so liegt er in der Richtung des Krümmungshalbmessers.

§ 255.

Erklärungen:

a) Wenn man in einer krummen Linie lauter parallele Sehnen zieht, so heißt eine gerade Linie, welche alle diese Sehnen zugleich halbiert, der Durchmesser oder Diameter dieser krummen Linie;

b) Steht dieser Diameter auf allen obigen Sehnen zugleich senkrecht, so nennt man ihn die Axe der krummen Linie, und

c)

c) die Puncte, in welchen die krumme Linie von der Axe durchschnitten wird, die Scheitelpuncte dieser krummen Linie.

d) Die Theile der krummen Linie auf beyden Seiten der Scheitel heissen die Schenkel oder Aeste der krummen Linie.

§. 256.

Erklärungen: (Fig. 85.)

a) Wenn man für den Punct M der krummen Linie AB auf die Abscissenlinie AO, die rechtwinklichte Ordinate MP zieht, und A zum Anfangspunct der Abscissen-Linie nimmt, so heißt

α) Jener Theil der Tangens TQ, welcher zwischen M und dem Puncte T liegt, wo sie mit der Abscissen Linie zusammenstoßt, das ist, MT die Tangens, und

β) der zwischen T und P liegende Theil der Abscissenlinie, oder TP die Subtangens des Punctes M, oder Abscisse AP.

b) Wird nun ferner durch M auf die Tangens ein Perpendikel nach der hohlen Seite der krummen Linie zu errichtet, so heißt

α) dieser Perpendikel, wenn man ihn bis zur Abscissenlinie verlängert, das ist, MN die Normal, und

B) der von der Normal und Ordinate abgeschnittene Theil PN der Abscissenlinie, die Subnormal vom Puncte M oder Abscisse AP.

I. Zusatz: Die Normal liegt allemal in der Richtung des Krümmungshalbmessers. (§. 254. IV. Zus.)

II. Zusatz: Die rechtwinklichten Dreyecke TMN, TPM, MPN sind einander ähnlich (§. 96. Geom.)

III. Zusatz: Zieht man pm' zur rechtwinklichten Ordinate PM parallel, bis sie mit der verlängerten Tangens in m' zusammenstoßt; ferner Mn zu AO ebenfalls parallel, so ist △Mnm' dem △MPN sowohl, als den Dreyecken TPM, und TMN ähnlich; denn $\alpha + \beta = 90° = \beta + \gamma$, mithin $\alpha = \gamma$; $P = n = 90°$; also △Mnm' ∞ △MPN; also auch den beyden andern (II. Zus.); folglich ist auch

IV. Zusatz: das krummlinigte Dreyeck Mnm, dessen eine Seite der kleine Bogen Mm ist, den Dreyecken MPN, TPM, TMN ähnlich (§. 254. III. Zus. und §. 233. VIII. Zus.)

§. 257.

Lehrsätze: (Fig. 85.)

In jeder krummen Linie ist bey rechtwinklichten Coordinaten für jeden Punct M

I. Die Subtangens $= \frac{ydx}{dy}$

II. Die Tangens $= \sqrt{(y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2})} = \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$

Beweis:

1) $\triangle Mnm \sim \triangle TPM$ (§. 256. IV. Zuſ.), mithin

2) $TP : PM = Mn : mn$, oder (§. 233. IV. und V. Zuſ.) $TP : y = dx : dy$, alſo

3. die Subtangens $TP = \frac{ydx}{dy}$ Nro. I.

4. Ferner iſt $TM^2 = TP^2 + PM^2$; oder

$$= \frac{y^2\,dx^2}{dy^2} + y^2 \text{ (N. 3.)}: \text{ alſo}$$

Nro. II.

5. Die Tangens $TM = \sqrt{(y^2 + \frac{y^2\,dx^2}{dy^2})}$

$$= \sqrt{(\frac{y^2\,dy^2 + y^2\,dx^2}{dy^2})} = \frac{y\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dy}$$

I. Zuſatz: Beyde Gleichungen ſind unvollſtändige Gleichungen (§. 233. VIII. Zuſ.)

II. Zuſatz: $AT = TP - AP =$ Subtang. $- x$

$$= \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$$

III. Zuſatz: Errichtet man durch A auf die Abſciſſenlinie den Perpendikel AI bis an die Tangens, ſo iſt:

$TP : PM = AT : AI$. oder $\frac{ydx}{dy} : y = \frac{ydx - xdy}{dy} : AI$;

alſo $AI = \frac{\frac{ydx - xdy}{dy}}{dx} = y - \frac{xdy}{dx}$

§. 258.

Lehrsätze: (Fig. 85.)

In jeder krummen Linie ist bey rechtwinklichten Coordinaten für jeden Punct M

I. die Subnormal $= \frac{ydy}{dx}$

II. Die Normal $= \sqrt{(y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2})}$

$= \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$

Beweis:

1. $\triangle Mnm \sim \triangle MPN$, also

2. $PN : PM = nm : Mn$; oder
$PN : y = dy : dx$; also

3. die Subnormal $PN = \frac{ydy}{dx}$ Nro. I.

4. Ferner $MN^2 = PM^2 + PN^2 = y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2}$
(Nro. 3.); also

5. Die Normal $MN = \sqrt{(y^2 + \frac{y^2 dv^2}{dx^2})}$

$= \sqrt{(\frac{y^2 dx^2 + y^2 dy^2}{dx^2})} = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$

Nro. II.

Zusatz: Beyde Gleichungen sind wieder unvollständige Gleichungen.

§. 259.

Aufgabe:

Wenn von einer krummen Linie ihre Gleichung für rechtwinklichte Coordinaten gegeben ist, die Subtangente für jeden Punct M zu finden.

Auflösung:

Man bestimme aus der gegebenen Gleichung nach den Regeln der Differentialrechnung den Werth von $\frac{ydx}{dy}$ (§. 257. N. I.), so erhält man die gesuchte Größe der Subtangente für die gegebene krumme Linie. Denn da man dadurch alle Hilfsgrößen entfernt, so ist letztere eine vollständige Gleichung (§. 301. Arith.)

I. Zusatz: Auf ähnliche Art läßt sich durch vollständige Gleichungen der Werth der Tangens, Subnormal, und Normal einer krummen Linie aus ihrer Gleichung bestimmen.

II. Zusatz: Wenn umgekehrt von den 4 Linien, nämlich der Subtangens, Tangens, Subnormal und Normal eine gegeben ist, so läßt sich vermittels der Integralrechnung die Gleichung der krummen Linie, also letztere selbst finden. Man nennet dieses Verfahren die verkehrte Methode mit Tangenten.

§. 260.

Aufgabe: (Fig. 82)

Die Subtangente TP für den beliebigen Punct M des Kreises aus seiner Gleichung $y^2 = ax - x^2$ anzugeben, wo a den Diameter anzeigt.

I. Auflösung:

1. $y^2 = ax - x^2$, mithin

$2ydy = adx - 2xdx$, und

$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a-2x}$; folglich

2. $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{a-2x} = \frac{2(ax-x^2)}{a-2x}$

3. Nun ist allgemein $PT = \frac{ydx}{dy}$ (§. 257. N. I.)

folglich für den Kreis

4. $TP = \frac{2y^2}{a-2x} = \frac{2(ax-x^2)}{a-2x}$

5. Da nun letztere Gleichung nur Hauptgrößen enthält, so giebt sie den vollständigen Werth der gesuchten Subtangens für den Punct M des Kreises.

II. Auflösung:

6. Man ziehe den Halbmesser CM, so ist $\triangle TPM \sim \triangle MPC$; mithin

7. $TP : PM = PM : PC$; das ist

$TP : y = y : \frac{1}{2}a - x$

$= 2y : a - 2x$; folglich

8. $TP = \frac{2y^2}{a-2x} = \frac{2(ax-x^2)}{a-2x}$

Zusatz: Für $x > \frac{1}{2}a$, also $2x > a$, wird $a - 2x$; folglich der Werth von TP negativ, das heißt, die Subtangente hat nun eine Lage, welche der

vorigen entgegengesetzt ist: sie fällt nicht mehr auf die Seite von A, sondern nach der Seite O zu

§. 261.

Aufgabe: (Fig. 82.)

Aus der gegebenen Gleichung des Kreises, die Tangens von M, das ist TM zu suchen.

I. Auflösung:

1. $y^2 = ax - x^2$;

$2ydy = adx - 2xdx = (a - 2x)\,dx$; also

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a-2x} = \frac{2\sqrt{(ax - x^2)}}{a - 2x} \text{ und}$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4(ax - x^2)}{(a-2x)^2} = \frac{4ax - 4x^2}{a^2 - 4ax + 4x^2}$$

mithin

2. $\frac{y^2\,dx^2}{dy^2} = \frac{(4ax - 4x^2)\,y^2}{a^2 - 4ax + 4x^2}$; folglich

3. $y^2 + \frac{y^2\,dx^2}{dy^2} = y^2 + \frac{(4ax - 4x^2)\,y^2}{a^2 - 4ax + 4x^2}$

$$= y^2\,\frac{a^2 - 4ax + 4x^2 + 4ax - 4x^2}{a^2 - 4ax + 4x^2}$$

$$= \frac{a^2\,y^2}{a^2 - 4ax + 4x^2}$$; mithin

4. $\sqrt{(y^2 + \frac{y^2\,dx^2}{dy^2})} = \frac{ay}{a - 2x}$;

5. Nun ist allgemein $TM = \sqrt{(y^2 + \frac{y^2\,dx^2}{dy^2})}$ (§. 257. N. II.); folglich

6.

6. ist im Kreise für den Punct M

$$TM = \frac{a\,y}{a-2x} = \frac{a\sqrt{(ax-x^2)}}{a-2x}$$

7. Diese Gleichung ist nun wieder eine vollständige.

II. Auflösung:

8. Zieht man den Halbmesser CM, so ist

9. $\triangle TMP \sim \triangle MPC$, also

10. $TM : PM = CM : CP$, oder

$TM : y = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a - x = a : a - 2x$, folglich

11. $TM = \frac{a\,y}{a-2x}$

Zusatz: Wenn wieder $x > \frac{1}{2}a$, so wird die Tangens negativ, mithin liegt sie nicht von M gegen A, sondern O zu.

§. 262.

Aufgabe: (Fig. 82.)

Aus der gegebenen Gleichung des Kreises die Subnormal PC für einen beliebigen Punct M anzugeben.

I. Auflösung:

1. $y^2 = ax - x^2$, also

$2ydy = adx - 2xdx$, und

2. $\frac{ydy}{dx} = \frac{a-2x}{2} = \frac{1}{2}a - x$

3. Nun ist allgemein $PC = \frac{ydy}{dx}$ (§. 258. N. I.)

mithin

4. $PC = \frac{1}{2}a - x$; welches abermal eine vollständige Gleichung ist.

II. Auflösung.

Offenbar ist $PC = CA - AP = \frac{1}{2}a - x$.

Zusatz: Wenn $x > \frac{1}{2}a$, so wird im Kreise die Subnormal negativ, folglich fällt dann P zwischen C und O.

§. 263.

Aufgabe: (Fig. 82.)

Aus der gegebenen Gleichung des Kreises für den Punct M die Normal MC zu finden.

I. Auflösung.

1. $y^2 = ax - x^2$

$2ydy = adx - 2xdx = (a - 2x)\,dx$, also

2. $\frac{ydy}{dx} = \frac{a - 2x}{2}$; mithin

$\frac{y^2dy^2}{dx^2} = \frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{4}$; und

3. $y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2} = ax - x^2 + \frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{4}$

$= \frac{4ax - 4x^2 + a^2 - 4ax + 4x^2}{4} = \frac{a^2}{4}$; also

4. $\sqrt{(y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2})} = \frac{1}{2}a$

5. Nun ist $CM = \sqrt{(y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2})}$ (§. 258. N. II.) also für den Punct M des Kreises

6.

6. CM $= \frac{1}{2}$ a, welches wieder eine vollständige Gleichung ist.

II. Auflösung.

Offenbar ist CM $= \frac{1}{2}$ a.

§. 264.

Lehrsatz: (Fig: 85.)

In jeder krummen Linie ist bey rechtwinklichten Coordinaten für jeden Punct M

$$\text{der Krümmungshalbmesser} = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

Beweis:

1. Man ziehe durch den Mittelpunct C des Krümmungshalbmessers CM, zur Abscissenlinie AO die Parallele CG, und verlängere
2. die rechtwinklichten Ordinaten MP, mp, bis solche mit ihr in G und g zusammenstossen.
3. Nun setze man GM $=$ u; gm $=$ u', so ist gm $-$ GM $=$ mn, oder das Differential von GM, das ist: mn $=$ du $=$ dy.
4. Bezeichnet man den Bogen AM der krummen Linie mit Z, so ist ebenfalls Mm $=$ dZ.
5. Ferner ist $\triangle$ MGC $\sim$ $\triangle$ MPN, mithin
6. $\triangle$ MGC $\sim$ $\triangle$ Mnm (§. 256. IV. Zus.) also
7. Mn : Mm $=$ GM : CM, oder
   dx : dZ $=$ u : CM, folglich

8.

8. $CM = \frac{udZ}{dx}$; und

9. $d(CM) = \frac{dxdudZ + udxd^2Z - udZd^2x}{dx^2}$ (§. 308. Arithm.)

10. Setzt man nun $CM = Cm$ (§. 254. II. Zuſ.) alſo $Cm - CM = d(CM) = o$; ſo wird

11. $\frac{dxdudZ + udxd^2Z - udZd^2x}{dx^2} = o$

$udxd^2Z - udZd^2x = -dxdudZ = dxdydZ$ (N. 3.) mithin

12. $u = -\frac{dxdydZ}{dxd^2Z - dZd^2x}$

13. Ferner iſt $Mm^2 = Mn^2 + mn^2$ (§. 233. VII. Zuſ.) oder

$dZ^2 = dx^2 + dy^2$; alſo

$dZ^1 = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$; und

14. $d^2Z = \frac{1}{2}(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2dxd^2x + 2dyd^2y)$

$= (dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}} \times (dxd^2x + dyd^2y)$

$= \frac{dxd^2x + dyd^2y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$; mithin

15. $dxd^2Z - dZd^2x = \frac{dx(dxd^2x + dyd^2y)}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$

$- (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} d^2x$

$= d$

$$= \frac{dx(dxd^2x + dyd^2y) - (dx^2 + dy^2)\,d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{dx^2d^2x + dxdyd^2y - dx^2d^2x - dy^2d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{dxdyd^2y - dy^2\,d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$$

16. Eben ſo iſt $dxdydZ = dxdy\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$; folglich (Nr. 12.)

17. $u = -dxdy\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \times \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dxdyd^2y - dy^2d^2x}$

$$= -\frac{dxdy\,(dx^2 + dy^2)}{dxdyd^2y - dy^2\,d^2x} = -\frac{dx(dx^2 + dy^2)}{dxd^2y - dyd^2x}$$

folglich wird N. 8

18. $CM = -\frac{dx\,(dx^2 + dy^2)}{dxd^2y - dyd^2x} \times \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx}$

$$= -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}$$

Dieſe Gleichung iſt nun wegen N. 6 eine unvollſtändige Gleichung.

1. Zuſatz: Nimmt man dx als eine beſtändige Größe, ſo wird $CM = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}$

II. Zusatz: Wenn dx beständig ist, und n die Normal bezeichnet, so ist: $CM = -\frac{n^3\,dx^2}{y^3\,d^2y}$; Denn

$\frac{y\,(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx} = n$ (§. 258. Nr. II.); also

$\frac{y^3(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3} = n^3$; und

$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} = \frac{n^3\,dx^2}{y^3\,d^2\,y}$; folglich

$CM = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}$ (I. Zus.) $= -\frac{n^3\,dx^2}{y^3\,d^2y}$

III. Zusatz: Wenn die Gleichung einer krummen Linie für rechtwinklichte Coordinaten gegeben ist, so läßt sich wie §. 259. ihr Krümmungshalbmesser für jeden Punct angeben.

§. 265.

Erklärung:

Eine gerade Linie, welcher sich eine krumme ohne Ende nähert, ohne mit ihr zusammen zu stossen, heißt die Asymptote dieser krummen Linie (ασυμπτωτος, qui non incurrere potest)

I. Zusatz: Die Asymptote einer krummen Linie ist einer Tangens für einen unendlich entfernten Punct gleich; denn da sie von der krummen Linie nicht durchschnitten wird, so liegt die letztere ganz auf einer Seite der Asymptote, und da sich beyde

im-

immer einander nähern ohne zusammen zu stossen, so kann man in unendlicher Entfernung ihren Berührungspunct annehmen (§. 253. a, und §. 256. a. α)

II. Zusatz: Wenn die Tangens TM (Fig. 85.) eine Asymptote der krummen Linie seyn soll, so muß M von A unendlich weit entfernt, also eine der Coordinaten x, y unendlich seyn.

III. Zusatz: Durch AT, AI ist die Lage jeder Tangens, folglich auch jene der Asymptote bestimmt.

IV. Zusatz: Bestimmt man aus der gegebenen Gleichung einer krummen Linie für rechtwinklichte Coordinaten AT und AI (§. 257. II. und III. Zus.) und setzt in solchen entweder $x = \infty$, oder $y = \infty$ (II. Zus.), so läßt sich allemal angeben, ob eine Asymptote möglich sey, und in welcher Lage. (III. Zus.)

§. 266.

Erklärungen:

a) Die wahre Länge einer krummen Linie angeben, das ist, ihr Verhältniß zum gewöhnlichen Längenmaaße bestimmen, heißt die krumme Linie rectificiren.

b) Den Flächeninhalt einer Fläche im gewöhnlichen Flächenmaaße angeben, heißt die Fläche quadriren.

c)

c) Den körperlichen Inhalt finden, heißt den Körper cubiren.

Zusatz: Eine Linie wird also rectificirt, wenn man ihre Länge in Schuhen, Zollen u. s. f. angeben weis, und die Fläche quadrirt, wenn ihr Inhalt in Quadratschuhen, Quadratzollen u. s. w. bestimmt ist; Wenn man die Anzahl der Cubikfuß, Cubikzolle, die ein Körper hält, bestimmt, so wird er cubirt.

§ 267.

Lehrsatz: (Fig. 85.)

Wenn Z die Länge der krummen Linie AM im gewöhnlichen Fußmaaße bezeichnet, so ist für rechtwinklichte Coordinaten:

$$Z = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis:

1. Man ziehe für den Punct M die rechtwinklichten Coordinaten AP, PM, das ist, x, y; und
2. die Hilfscoordinaten Ap, pm oder x′, y′, und durch M zur Abscissenlinie die Parallele Mn, so ist
3. Mn = Pp = dx; mn = dy; und Mm = dZ.
4. Vom krummlinigten Dreyecke Mnm läßt sich Mm = dZ als ein Bogen des Krümmungskreises (§. 254.) folglich
5. als ein unendlich kleiner Theil der Tangens nehmen (§. 233. VII. und VIII. Zus.) mithin

6. $Mm^2 = Mn^2 + mn^2$, oder $dZ^2 = dx^2 + by^2$
also
$dZ = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$

7. Leztere Gleichung giebt das Differential der gesuchten Größe, aber da die Größen der Construction wegen in einiger Entfernung von ihrer Gränze betrachtet werden, so ist eben dieselbe eine unvollständige Gleichung.

8. Integrirt man also letztere Gleichung, das ist, nimmt man: $Z = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ so erhält man eine Gleichung, welche, so bald aus ihr nach den gewöhnlichen Reductionsgesetzen alle Hilfsgrößen weggeschafft sind, den vollständigen Werth von Z angiebt (§. 301. Arithm.)

Zusatz. Wenn man aus der gegebenen Gleichung für rechtwinklichte Coordinaten einer krummen Linie durch Differentiiren den Werth von $(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ bestimmt. und solchen integriret, so wird dadurch die krumme Linie rectificirt.

§. 268.

Lehrsatz: (Fig. 85.)

Wenn R den Flächeninhalt der zwischen der krummen Linie $AM = Z$, und den rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$; $PM = y$ enthaltenen Fläche AMP anzeigt, so ist: $R = \int y dx$.

Beweis:

1. Da Mm ein unendlich kleiner Bogen des Krümmungskreises (§. 254.) also

2. das unendlich kleine Trapez PM mp = dR ein Kreistrapez ist, so läßt sich statt des Bogens Mm ihre Sehne, oder statt des krummlinigten Trapezes

3. dafür das geradlinigte PMmp setzen, (§. 233, IX. Zus.)

4. Nun ist PMmp = $\frac{1}{2}$ (PM + pm) Pp (§. 152. Geom.) oder
$dR = \frac{1}{2}(y + y + dy)\,dx = ydx + \frac{1}{2}dydx = ydx$
(§. 302. I. Zus. Arithm.)

5. Letztere unvollständige Gleichung enthält also das Differential der ganzen Fläche AMP, folglich giebt ihr Integral die Fläche selbst, das ist

6. $R = \int ydx$.

I. Zusatz: Wenn (Fig. 80.) für schiefwinklichte Coordinaten α ihren eingeschlossenen Winkel APM bezeichnet, so ist: $R = \int \sin.\alpha\, y\, dx$. Denn PM mp = (PM + pm) po, und po : Pp = sin. APM : 1, mithin po = sin. APM. Pp, mithin PM mp = $\frac{1}{2}$ (y + y + dy) sin. α dx = y sin. α dx, folglich $R = \int \sin.\alpha\, y\, dx$.

II. Zusatz: Wenn man aus der gegebenen Gleichung für rechtwinklichte Coordinaten einer krummen Linie den Werth von ydx oder für schiefwinklichte jenen von sin. α y d x sucht, und solchen integriret, so bekömmt man eine vollständige Gleichung für den Flächeninhalt, weil dadurch alle Hilfsgrößen entfernet werden.

§. 269.

Erklärungen: (Fig. 85.)

a) Wenn sich die zwischen den rechtwinklichten Coordinaten AP, PM und der krummen Linie AM eingeschlossene Ebene AMP um die Abscissen Linie AO dreht, so heißt der dadurch erzeugte Körper ein Sphäroid, und

b) die vom Bogen AM beschriebene krumme Fläche die Oberfläche dieses Sphäroids, so wie

c) der von der Ordinate PM beschriebene Kreis die Grundfläche eben dieses Sphäroids.

§. 270.

Lehrsätze: (Fig. 85.)

Wenn π die Peripherie des Kreises für den Durchmesser 1, K den körperlichen Inhalt, und Q die Oberfläche eines Sphäroids bezeichnen, so ist

I. $K = \int \pi y^2 \, dx$; und

II. $Q = \int 2 \pi y \, (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$

Beweis:

1. Man ziehe die Hilfscoordinaten Ap, pm, so ist Mm ein unendlich kleiner Theil des Krümmungskreises, mithin $Mm = dZ = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 267.)

2. Das krummlinigte Kreistrapez PMmp kömmt dem geradlinigten PMmp unendlich nahe, folglich

lich kann man letzteres an die Stelle des erstern setzen (§. 233. IX. Zus.)

3. Durch das Umdrehen des Kreistrapezes wird also ein abgekürzter Kegel, so wie durch den Bogen Mm die krumme Seitenfläche desselben beschrieben.

4. Nun ist dieser abgekürzte Kegel das körperliche Element, oder das Differential des Sphäroids, oder $= dK$, und

5. die krumme Seitenfläche dieses Kegels das Element oder das Differential der Oberfläche dieses Sphäroids oder $= dQ$;

6. Es ist also

$dK = \frac{1}{3}$ Pp. π ($pm^2 + PM^2 +$ pm. PM) (§. 269. Geom.) oder

$= \frac{1}{3} \pi\, dx\, ((y + dy)^2 + y^2 + (y + dy)\, y)$

$= \frac{1}{3} \pi\, dx\, (y^2 + 2\, ydy + dy^2 + y^2 + y^2 + ydy)$

$= \frac{1}{3} \pi\, dx\, (3\, y^2 + 3\, ydy + dy^2)$

7. Nun ist $3\, y^2$ von $3\, y^2 + 3\, ydy + dy^2$ unendlich wenig unterschieden (§. 296. Zus. Arith.) folglich wird

8. $dK = \frac{1}{3} \pi\, dx.\ 3\, y^2 = \pi\, y^2\, dx$ eine unvollständige Gleichung (§. 299. Arithm.), und

9. $K = \int \pi\, y^2\, dx.$ Nr. I.

10, Eben so ist aus Nr. 5.

$dQ =$ Mm. π (PM + pm) (§. 270. Geom.) oder

$= \pi\, dZ\, (y + y + dy) = \pi\, dZ\, (2\, y + dy)$

11. Ferner ist 2y von 2y + dy unendlich wenig unterschieden, folglich

12. $dQ = \pi . dZ . 2y$ eine unvollständige Gleichung, und eben so

$= \pi . 2y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ (Nr. 1.); also

13. $Q = \int 2 \pi y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ Nr. II.

I. Zusatz: Wenn von einer krummen Linie ihre Gleichung für rechtwinklichte Coordinaten gegeben ist, so findet man den körperlichen Inhalt des durch sie erzeugten Sphäroids, wenn man durch Differentiirung der Gleichung den Werth von $\pi y^2 dx$ bestimmt, und solchen integrirt, wo dann durch Entfernung aller Hilfsgrößen letztere Gleichung vollständig wird.

II. Zusatz: Bestimmt man aus der Gleichung der krummen Linie den Werth von $2\pi y(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$, und integrirt solchen, so erhält man den Inhalt von der Oberfläche dieses Sphäroids in einer vollständigen Gleichung, weil dadurch alle Hilfsgrößen entfernet werden.

II. Hauptstück.

Von Kegelschnitten.

I. Abschnitt.

Von Kegelschnitten überhaupt.

§. 271.

Erklärung.

Wenn man einen Kegel mit einer Ebene durchschneidet, so heißt jener Theil dieser Ebene, der innerhalb des Kegels fällt, ein Kegelschnitt (Sectio conica).

I. **Zusatz:** Wenn man (Fig. 86.) durch die Axe DC eines gleichseitigen Kegels eine Ebene legt, so giebt der Kegelschnitt das gleichschenklichte Dreyeck EDH, welches, da in seiner Ebene die Axe des Kegels liegt, der **Axentriangel** heißt.

II. **Zusatz.** Der Axentriangel steht auf der Grundfläche des Kegels senkrecht; denn DC steht auf solcher senkrecht (§. 232. II. Zus. Geom.), also auch der Axentriangel (§. 170. Geom.)

III. **Zusatz:** Die Durchschnittslinie EH des Axentriangels und der Grundfläche des Kegels ist ein

Dia-

Diameter; denn in ihr liegt der Mittelpunct der Grundfläche des Kegels.

IV. Zusatz: Wenn man den gleichseitigen Kegel in einem beliebigen Punct N mit einer Ebene durchschneidet, welche zur Grundfläche parallel ist, so giebt der Kegelschnitt einen Kreis (§. 249. I. Zus. Geom.), auf welchen die Axe DC senkrecht steht (§. 173. Geom.), und durch dessen Mittelpunct c geht. Denn DC : DC = cN : CH = cR : CE (§. 92. Geom.) nun ist CH = CE, also auch cN = cR, folglich ist c der Mittelpunct.

V. Zusatz: Letzterer Kreis steht auf dem Axentriangel senkrecht, und ihre Durchschnittslinie NR ist der Diameter dieses Kreises.

VI. Zusatz: RN ist zu EH parallel (§. 172. II. Zus. Geom.)

VII. Zusatz: Wenn man durch einen beliebigen Punct A des einen Schenkels DH zum andern Schenkel DE, mit HE, oder RN eine Parallellinie AG zieht, so ist der Triangel ADG ebenfalls gleichschenklicht.

§. 272.

Erklärungen:

a) Wenn man (Fig. 86.) in der Ebene vom Scheiteltriangel EDH eines gleichseitigen Kegels durch einen beliebigen Punct A des Schenkels DH eine gerade Linie AB so zieht, daß BAH = EDH also AB ♯ DE ist, und man legt durch AB eine Ebene, welche auf jener des Axentriangels senkrecht steht, so heißt die krumme Durchschnittslinie KMAmI

die=

dieser Ebene mit der Oberfläche des Kegels eine Parabel.

b) Zieht man hingegen (Fig. 87.) AB so, daß BAH > EDH ist, so heißt die krumme Durchschnittslinie AMBA der durch AB gelegten und auf dem Axentriangel senkrechten Ebene, mit der Oberfläche des Kegels, eine Ellipse.

c) Wenn endlich (Fig. 88.) der Winkel bAH < EDH, so heißt dieser Durchschnitt eine Hyperbel.

I. Zusatz: Da bey der Parabel (Fig. 86.) die Linie AB zur Seite DE parallel ist, und mit der andern Seite DH den Punct A gemein hat, so kann AB mit diesen beyden Seiten nirgends in einem andern Puncte mehr zusammenstossen, man mag sie auch wie immer verlängern; mithin ist AB eine der Größe nach unbestimmte Linie.

II. Zusatz: In der Ellipse schneidet die unter dem Winkel BAH > EDH (Fig. 87) gezogene gerade Linie AB die beyden Seiten des Axentriangels oder Kegels; denn mit DH stoßt sie in A zusammen, da nun BAD + ADB < 180°, so stoßt sie auch mit ED in B zusammen (§. 44. Geom.); folglich ist bey der Ellipse AB eine der Größe und Lage nach bestimmte Größe, die man gewöhnlich mit a bezeichnet.

III. Zusatz: Bey der Hyperbel (Fig. 88.) schneidet die unter dem Winkel bAH > EDH gezogene gerade Linie die eine Seite DH in A; und da BAD

+

+ ADB < 180°, so trifft eben diese Linie verlängert mit der ebenfalls verlängerten Seite ED in B zusammen, mithin ist wieder AB eine der Grösse und Lage nach bestimmte Linie, die man ebenfalls gewöhnlich mit a bezeichnet.

IV. Zusatz: Stellt man sich (Fig. 88.) die Seiten des Axentriangels EDH durch die Spitze D verlängert, folglich noch einen umgekehrten Kegel hDe vor, so schneidet die durch Ab gelegte Ebene den obern umgekehrten Kegel ebenfalls, und die Durchschnittslinie iBk der Ebene mit der Oberfläche dieses umgekehrten Kegels ist eine Hyperbel.

V. Zusatz: Außer diesen 3 eben angeführten, und dem Axentriangel, giebt es im gleichseitigen Kegel keinen andern Kegelschnitt; denn der Kreis ist nur eine besondere Art der Ellipse.

VI. Zusatz: Der Axentriangel gehört, so wie auch größtentheils der Kreis in das Gebieth der Elementargeometrie, einige schwerere Sätze des letztern ausgenommen.

§. 273.

Erklärungen.

a) In den Gleichungen für die Kegelschnitte heißt die beständige Größe, welche in Verbindung mit x und y die Natur einer jeden ausdrückt, der Parameter, (von παραμετρέω, da er in Verbindung mit der Abscisse das Quadrat der Ordinate mißt); der Parameter für rechtwinklichte Coordinaten

naten auf der Axe wird in der Folge immer mit p bezeichnet.

b) Jener Punct der Axe, wo die Ordinate dem halben Parameter gleich ist, heißt der Brennpunct (focus).

c) Eine gerade Linie vom Brennpuncte nach einem Puncte M obiger krummen Linien, heißt die Entfernung des Punctes M vom Brennpuncte (radius vector) Fahrstrich oder nach einigen der Träger.

d) Unter Coordinaten ohne Beysatz versteht man immer rechtwinklichte.

II. Abschnitt.

Von der Parabel.

§. 274.

Lehrsatz: (Fig. 86.)

Wenn man AB zur Abscissenlinie, und A zu ihrem Anfangspunct nimmt, die rechtwinklichten Coordinaten mit x, y, und den Parameter mit p bezeichnet, so ist für jeden Punct M der Parabel:

$$y^2 = px.$$

Beweis.

1. Man lege durch den beliebigen Punct M der Parabel eine Ebene zur Grundfläche parallel, so ist

2. der Kegelschnitt MRmN ein Kreis, welcher auf dem Axentriangel DEH senkrecht steht, und die

Durch

Durchschnittslinie RN ist der Diameter, und zu EH parallel (§. 271. IV. — VI. Zus.) folglich steht auch

3. die Durchschnittslinie MPm der Parabel mit dem Kreis auf dem Axentriangel (§. 171. Geom.), also auch auf den in der Ebene desselben gezogenen Linien AB, NR senkrecht (§. 162. Geom.); mithin sind

4. AP, MP rechtwinklichte Coordinaten für den Punct M der Parabel, und

5. im Kreise ist: $MP^2 = NP . PR$ (§. 101. Geom.)

6. Durch A ziehe man im Axentriangel zu NR die Parallele AG, so ist:

7. $AG = PR$ (§. 45. IV. Zus. Geom.) und

8. $GD = AD$ (§. 271. VII. Zus.)

9. Ferner ist $\triangle APN \backsim \triangle DGA$, also
$DG : AG = AP : PN$, mithin

10. $PN = \frac{AG}{DG} . AP = \frac{AG}{AD} . AP$ (Nr. 8.) also

11. $MP^2 = \frac{AG^2}{AD} . AP$ (Nr. 5, 7 und 10.).

12. Nun ist $MP = y$, $AP = x$, weil diese Gleichung für jeden andern Punct der Parabel ebenfalls gilt; hingegen ist $\frac{AG^2}{AD}$ eine unveränderliche Größe, oder der Parameter (§. 273.); setzt man solchen $= p$; so ist

13. $y^2 = px$.

I. Zusatz: Im gleichschenklichten Dreyecke ADG ist

$AD : \frac{1}{2} AG = 1 : \text{sin.} \frac{1}{2} D$ (§. 327. Trigon.) also

$AG = 2 AD \text{ sin.} \frac{1}{2} D$

$AG^2 = 4 AD^2 \text{ sin.} \frac{1}{2} D^2$ und

$\frac{AG^2}{AD} = p$ (Nr. 12.) $= 4 AD \text{ sin.} \frac{1}{2} D^2$, folglich

$AD = \frac{p}{4 \text{ sin.} \frac{1}{2} D^2}$ mithin

II. Zusatz. Wenn von einem gleichseitigen Kegel der Winkel D gegeben ist, und man nimmt

$AD = \frac{p}{4 \text{ sin.} \frac{1}{2} D^2}$, so erhält man allemal nach §.

272. a. eine Parabel, in welcher $y^2 = px$ ist.

III. Zusatz: $\text{sin.} \frac{1}{2} D^2 = \frac{p}{4 AD}$ (I. Zus.)

$\text{sin.} \frac{1}{2} D^2 = \frac{1 - \text{cos. } D}{2}$ (§. 308. IV. Trigon) also

$\frac{p}{2 AD} = 1 - \text{cos. } D$, und

$\text{cos. } D = 1 - \frac{p}{2 AD}$; mithin wenn von einem gleichseitigen Kegel die Entfernung DA des Schnittes gegeben, und man nimmt den Winkel D so, daß $\text{cos. } D = 1 - \frac{p}{2 AD}$ ist, so erhält man wieder eine Parabel, wo $y^2 = px$ ist.

IV. Zusatz: Jede krumme Linie, wo $y^2 = px$, ist eine Parabel (παραβολη von παραβάλλω an-

lie-

anliegen, oder vergleichen) denn man kann entweder für den Kegel den Winkel D annehmen, und daraus AD bestimmen, oder man kann letztere beliebig setzen, und dafür D suchen, wenn nur allemal p eine unveränderliche Größe bezeichnet.

V. Zusatz: In der Parabel ist $y = \pm \sqrt{px}$, das heißt, auf beyden Seiten von AB giebt es Ordinaten, die einander gleich, aber entgegengesetzt sind, folglich ist AB die Axe der Parabel (§. 255.) und da für $x = o$, auch $y = o$ ist, so ist A der Scheitel derselben.

VI. Zusatz: für $x = \infty$, wird auch $y = \infty$, das heißt, die Parabel hat vom Scheitel auf jeder Seite 2 gleiche unendliche Schenkel oder Aeste (ramos).

VII. Zusatz: Setzt man x negativ, so ist $y = \pm \sqrt{-px}$ eine unmögliche Größe (§. 100. III. Zus. Arith.) mithin giebt es auf der über den Scheitel A hinaus verlängerten Axe keine Ordinaten.

VIII. Zusatz: Da $x : y : p$, so ist der Parameter der Axe die dritte geometrische Proportionalgröße zur Abscisse und Ordinate, so wie die Ordinate die mittlere Proportionalgröße zwischen der Abscisse und dem Parameter ist.

IX. Zusatz: Wenn x, X zwey verschiedene Abscissen auf der Axe, und y, Y ihre rechtwinklichten Ordinaten bezeichnen, so ist

$y^2 : Y^2 = px : pX = x : X$, also

$y : Y = \sqrt{x} : \sqrt{X}$.

§. 275.

Lehrsatz: (Fig. 89.)

Der Brennpunct F ist in der Parabel um den vierten Theil des Parameters vom Scheitel entfernt, oder

$$AF = \frac{1}{4} p$$

Beweis:

1. Man ziehe zu AF die entsprechende rechtwinklichte Ordinate FM′, so ist
2. $FM' = \frac{1}{2} p$ (273. b) mithin $FM'^2 = \frac{1}{4} p^2$.
3. Ferner ist allgemein $y^2 = px$, also
4. $FM'^2 = p.\ AF$, folglich
5. $p\ AF = \frac{1}{4} p^2$, oder
   $AF = \frac{1}{4} p$.

Zusatz: Zieht man vom Brennpuncte F nach einem beliebigen Puncte M der Parabel eine gerade Linie, oder den Radius Vector FM, und die Coordinaten AP, PM, so ist $FM^2 = PM^2 + FP^2$
$= PM^2 + (AP - AF)^2$, das ist
$= y^2 + (x - \frac{1}{4} p)^2$ (Lehrs.) $= px + x^2 - \frac{1}{2} px$
$+ \frac{1}{16} p^2$
$= x^2 + \frac{1}{2} px + \frac{1}{16} p^2$, folglich
$FM = x + \frac{1}{4} p$, das ist: der Radius Vector ist der Summe von der Abscisse und dem vierten Theile des Parameters gleich.

§. 276.

Lehrsätze: (Fig. 89.)

In der Parabel ist für jeden beliebigen Punct M

I. die Subnormal $PN = \frac{1}{2} p$.

II. Die Subtangens $PT = 2x$.

Be-

Beweis:

1. Für jede krumme Linie ist:

die Subnormal $PN = \frac{ydy}{dx}$ (§. 258. I.) und

2. die Subtangens $PT = \frac{ydx}{dy}$ (§. 257. I.)

3. Nun behandle man die Gleichung der Parabel nach §. 259. Es ist nemlich $y^2 = px$ und $2ydy = pdx$, mithin

4. $\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2} p =$ der Subnormal PN der Parabel.

5. Ferner $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$, mithin

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x = \text{der Subt. PT.}$$

6. Da endlich aus den beyden Gleichungen alle Hilfsgrößen entfernt sind, so sind sie beyde vollständige Gleichungen.

I. Zusatz: Die Normal der Parabel oder MN ist

$= \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4} p^2)} = \sqrt{(px + \frac{1}{4} p^2)}$;

Denn $\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2} p$ (N. 4.) mithin

$\frac{y^2 dy^2}{dx^2} = \frac{1}{4} p^2$, und

$y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2} = y^2 + \frac{1}{4} p^2$; also $\sqrt{(y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2})}$

$= \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4} p^2)}$, das ist aus §. 358. II.

die Normal $MN = \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4} p^2)}$

$= \sqrt{(px + \frac{1}{4} p^2)}$.

II.

II. Zusatz: Die Tangens in der Parabel, oder $TM = \sqrt{(4x^2 + px)} = \sqrt{(4x(x + \frac{1}{4}p))}$ $= \sqrt{(4x.\,FM)}$ Denn

$\frac{ydx}{dy} = 2x$ (Nr. 5.) also $\frac{y^2dx^2}{dy^2} = 4x^2$, und

$y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2} = y^2 + 4x^2$; also $\sqrt{(y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2})}$ $= \sqrt{(px + 4x^2)}$, mithin aus §. 257. II. Tangens $TM = \sqrt{(px + 4x^2)} = \sqrt{(4x(x + \frac{1}{4}p))} = \sqrt{(4x.\,FM)}$ (§. 275. Zus.)

III. Zusatz: Wenn für M die Coordinaten AP, PM gegeben sind, und man nimmt $AT = AP$, also $PT = 2x$ (Lehrs.) und zieht MT. so ist letztere die Tangens.

IV. Zusatz: Durch die Tangens ist die Lage der Normal gegeben und umgekehrt (§. 256. b).

V. Zusatz: Durch die Subnormal ist die Lage der Normal ebenfalls bestimmt: denn zwischen M und N giebt es nur eine Linie.

§. 277.

Lehrsatz: (Fig. 89.)

Wenn man in der Parabel für einen beliebigen Punct M die Tangens TMQ, die Normal MN, den Radius Vector FM, und durch M zur Axe AO die Parallele MR zieht, so ist

I. der Winkel $RMQ = FMT$, und

II. . . . . $RMN = NMF$.

Beweis:

1. $TF = TP - FP = TP - AP + AF$
$= 2x - x + \frac{1}{4}p = x + \frac{1}{4}p = FM$ (§. 275. und 276.) mithin

2. $FTM = TMF$.

3. Ferner ist $PMN = PTM$, also auch
$PMN = TMF$.

4. $PMN + NMR = NMR + RMQ = 90°$, also
$PMN = RMQ$, und also aus Nr. 3.

5. $RMQ = FMT$. Nr. I.

6. $NMF + FMT = NMR + RMQ = 90°$,
ferner $FMT = RMQ$, also

7. $RMN = NMF$. Nr. II.

Anmerkung. Dieser Satz enthält den Beweis, daß sich alle Lichtstrahlen, welche zur Axe parallel einfallen im Brennpuncte sammeln.

§. 278.

Lehrsatz: (Fig. 90.)

Wenn man MR, welche zur Axe AO parallel ist, zur Abscissenlinie, und M für ihren Anfangspunct nimmt, ferner zur Tangens TM die Ordinaten z. B. mr parallel zieht, endlich die Abscisse mit u, die Ordinate durch v und den entsprechenden Parameter mit q bezeichnet, so ist allgemein:

$$v^2 = q\,u.$$

Be-

Beweis:

1. Die dem Puncte M auf der Axe entsprechenden Coordinaten AP, PM drücke man wie gewöhnlich mit x, und y, so wie den Parameter der Axe mit p aus.

2. Da man nun M als Anfangspunct der Abscissenlinie MR setzt, so ist FM eine unveränderliche Größe, man setze also FM $=$ c; so ist

3. $PM = y = \sqrt{px}$; und $TP = 2x$ (§. 276.) und

4. $rt = MT = \sqrt{4x.c}$ (§. 276. II. Zus.) also

5. $mt = rt - rm = \sqrt{4cx - v}$.

6. Man ziehe noch die rechtwinklichten Coordinaten Ao, om, so ist $\triangle MPT \sim \triangle mot$, mithin

7. $TM : PM = mt : om$, das ist:
$\sqrt{4cx} : \sqrt{px} = \sqrt{4cx - v} : om$, folglich

8. $$om = \frac{\sqrt{px}\sqrt{4cx - v}\sqrt{px}}{\sqrt{4cx}\qquad\qquad\sqrt{4cx}}$$
$$= \sqrt{px} - \frac{v\sqrt{px}}{\sqrt{4cx}}$$

9. Ferner ist $TM : TP = tm : to$, oder
$\sqrt{4cx} : 2x = \sqrt{4cx - v} : to$, also

10. $$to = \frac{2x\sqrt{4cx}}{\sqrt{4cx}} - \frac{2xv}{\sqrt{4cx}} = 2x - \frac{2xv}{\sqrt{4cx}}$$

11. Nun ist $Mr = u = Tt$. also
$$To = Tt + to = u + 2x = \frac{2xv}{\sqrt{4cx}}$$

12.

12. Ferner $AT = 2x - x$ (§. 257. II. Zuſ.) $= x$, also

13. $Ao = To - TA = u + 2x - \frac{2xv}{\sqrt{4cx}} - x$

$= u + x - \frac{2xv}{\sqrt{4cx}}$

14. Endlich $om^2 = p.\ Ao$; das iſt:

$(\sqrt{px} - \frac{v\sqrt{px}}{\sqrt{4cx}})^2 = p(u + x - \frac{2xv}{\sqrt{4cx}})$ (Nr. 8. und 13.), oder

$px - \frac{2vpx}{\sqrt{4cx}} + \frac{v^2px}{4cx}$

$= pu + px - \frac{2vpx}{\sqrt{4cx}}$, alſo

$\frac{v^2px}{4cx} = pu$, folglich

15. $v^2 = \frac{4cpxu}{px} = 4cu$.

16. Da nun c, mithin auch 4c eine beſtändige Größe, alſo der Parameter oder q iſt, ſo wird

17. $v^2 = qu$.

I. Zuſatz: $v = \pm\sqrt{qu}$, folglich gehören zu jeder Abſciſſe Mr zwey gleiche einander entgegengeſetzte Ordinaten rm, rn; mithin iſt

II. Zuſatz: die Abſciſſenlinie MR ein Diameter, und M der Scheitel deſſelben (vertex diametri) (§. 255.); der Parameter q dieſes Diameters iſt dem

vierfachen Abstande seines Scheitels M vom Brennpuncte F gleich.

III. Zusatz: Wenn man für einen andern Punct m die Tangens, und zur Axe durch m die Abscissenlinie parallel zieht, so halbirt sie ebenfalls alle zur Tangens parallel gezogenen Sehnen, mithin ist jede gerade Linie, welche mit der Axe parallel läuft, ein Diameter der Parabel.

IV. Zusatz: Für jeden Diameter ist der Parameter die dritte geometrische Proportional zur Abscisse und Ordinate, und die Ordinate die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen der Abscisse und dem Parameter; die Abscissen verhalten sich wie die Quadrate der Ordinaten, und die Ordinaten hingegen wie die Quadratwurzeln aus ihren entsprechenden Abscissen.

§. 279.

Erklärung: (Fig. 91.)

Wenn man die Axe, vom Scheitel aus, um AG $=$ AF $=$ $\frac{1}{4}$ p verlängert, und durch G auf sie die Perpendikularlinie DE errichtet, so heißt letztere die **Richtungslinie** der Parabel (linea directrix).

I. Zusatz: In der Parabel ist jeder von einem Punct M auf die Richtungslinie gezogene Perpendikel dem Radius Vector gleich, oder Mm $=$ MF; denn man ziehe die Ordinate MP, so ist

Mm $=$ PG $=$ x $+$ $\frac{1}{4}$ p $=$ MF §. 275. Zus.)

II.

II. Zusatz: Wenn man durch G auf einer geraden Linie GO einen Perpendikel errichtet, in GO einen bestimmten Punct F nimmt, so ist eine krumme Linie, in welcher für jeden beliebigen Punct M allemal $Mm = FM$ ist, eine Parabel. Denn GF ist nun vermög der Annahme eine beständige Größe, und eben so ist $AG = AF = \frac{1}{2} GF$; man setze also $GF = \frac{1}{2} p$, mithin $AG = AF = \frac{1}{4} p$.

Ferner ziehe man aus M auf GO den Perpendikel MP, so ist für die Abscissenlinie AO und ihren Anfangspunct A, die Linie $FM = Mm$ (ex hyp.) $= GP = GA + AP = \frac{1}{4} p + x$, und $FP = AP - AF = x - \frac{1}{4} p$; ferner $PM^2 = FM^2 - PF^2 = (x + \frac{1}{4} p)^2 - (x - \frac{1}{4} p)^2$, also

$y^2 = x^2 + \frac{1}{2} px + \frac{1}{16} p^2 - x^2 + \frac{1}{2} px - \frac{1}{16} p^2$
$= px$; folglich die krumme Linie eine Parabel (§. 274. IV. Zus.)

III. Zusatz: Wenn man noch die gerade Linie mF, und die Tangens TMQ zieht, so halbirt letztere den Winkel FMm sowohl, als die Linie mF, und steht auf letzterer senkrecht. Denn $RMQ = mMT$ als Verticalwinkel; und $RMQ = FMT$ (§. 277), also $mMT = FMT$; da ferner $FM = mM$ (I. Zus.) mithin FMm ein gleichschenklichtes Dreyeck ist, so halbirt auch TM die Seite mF, und steht auf ihr senkrecht (§. 39. I. Zus. Geom.).

IV. Zusatz: Wenn man also durch eine gerade Linie TM entweder den Winkel FMm, oder die Seite

mF halbiret, so ist TM die Tangens für den Punct M der Parabel. Man vergleiche §. 276. III. Zus.

§. 280.

Aufgabe: (Fig. 91.)

Für einen gegebenen, oder willkürlich angenommenen Parameter p eine Parabel zu verzeichnen.

I. Auflösung:

1. Man ziehe die Abscissenlinie AO, und theile sie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und errichte auf ihr durch alle diese Theilungspuncte 1, 2, 3... Perpendikel.

2. Nun suche man zwischen jeder Abscisse A1, A2, A3, u. s. f. und dem Parameter die mittlere geometrische Proportional (§. 102. Geom.) und trage solche

3. allemal zu beyden Seiten des entsprechenden Perpendikels auf; so liegen

4. alle diese Endespuncte in der Parabel (§. 274. VIII. Zus.

5. Zieht man daher eine krumme Linie durch dieselben, so kömmt sie der Parabel um so näher, je mehr Puncte man bestimmt, folglich in je kleinere Theile man die Abscissenlinie getheilt hat.

II. Auflösung:

6. Man nehme auf der Axe $AG = AF = \frac{1}{4} p$, und errichte durch G den Perpendikel DE.

7.

7. An GE lege man ein Lineal, und an selbes einen Winkelhacken BIH so, daß ein Schenkel BI längst GE, und der andere IH auf GO fällt.

8. Nun befestige man eine Schnurr = IH mit dem einen Ende im Puncte F der Axe, mit dem andern in H des Winkelhackens.

9. Mit einem Bleystifte spanne man diese Schnur auf der Axe oder längst dem Winkelhacken, so fällt solcher auf A; denn in dieser Lage ist AF + AH = IH (Nr. 8.)

10. Rückt man endlich den Winkelhacken längst dem Lineal von G gegen E zu, hält mit dem Bleystifte am Winkelhacken die Schnur immer gespannt, so beschreibt solcher einen Schenkel der Parabel; denn

11. Für jeden Punct M' der beschriebenen Linie ist immer FM' + M'H = IH (Nr. 4.) = IM' + M'H, also
FM' = IM'. mithin M' ein Punct der Parabel (§. 279. II. Zus.).

Anmerkung. Es leuchtet für sich ein, wie wenig Schärfe man bey der I. Auflösung für die zwischen ein Paar Ordinaten liegenden Puncte, und bey der II. Auflösung für die ganze gezogene Linie zu erwarten habe.

§. 281.

Aufgabe:

Für den Punct M der Parabel, oder die gegebene Abscisse AP = x den Krümmungshalbmesser MC zu suchen.

Auf-

Auflösung:

1. Da man die Abtheilungen auf der Abscissenlinie nach Belieben nehmen kann, so macht man sie einander gleich, folglich ist dx eine beständige Größe, mithin

2. Der Krümmungshalbmesser jeder krummen Linie, oder

$$MC = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}$$ (§. 264. I. Zus.)

3. Nun ist für die Parabel:

$y^2 = px$, also

$2ydy = pdx$, und

$dy = \frac{pdx}{2y} = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, mithin

$dy^2 = \frac{p^2 dx^2}{4px}$, also

4. $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = (dx^2 + \frac{p^2 dx^2}{4px})^{\frac{3}{2}}$

$= (\frac{4pxdx^2 + p^2 dx^2}{4px})^{\frac{3}{2}} = \frac{(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} dx^3}{8 p^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}}}$

5. Ferner da $dy = \frac{p\,dx}{2\sqrt{px}}$ (Nr. 3.)

$= \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$, so ist

$d^2 y = -\frac{1}{4} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx^2$ (§. 313. Arithm.) und

$dx\,d^2 y = -\frac{1}{4} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx^3 = -\frac{p^{\frac{1}{2}} dx^3}{4 x^{\frac{3}{2}}}$, mithin

6.

6. Für die Parabel

$$MC = \frac{(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} dx^3}{8 p^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}}} \times \frac{4 x^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}} dx^3} \text{ (Nr. 2, 4, u. 5.)}$$

$$= \frac{(4px + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2 p^2}$$

7. Da nun keine Hilfsgröße mehr vorkömmt, so ist letztere eine vollständige Gleichung.

I. Zusatz: Will man den Krümmungshalbmesser der Parabel aus der Formel: $MC = -\frac{n^3 dx^2}{y^3 d^2y}$ (§. 264. II. Zus.) suchen, so ist

$n = \frac{(4px + p^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$ (§. 276. I. Zus.) mithin

$$n^3 dx^2 = \frac{(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} dx^2}{8}$$

Ferner $y^3 d^2y = p^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \times -\frac{1}{4} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx^2$ (N. 5.)

$= -\frac{1}{4} p^2 dx^2 = -\frac{p^2 dx^2}{4}$, folglich

$$MC = \frac{(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} dx^2}{8} \times \frac{4}{p^2 dx^2}$$

$= \frac{(4px + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2 p^2}$ wie vorher

II. Zusatz: Für den Scheitel der Parabel ist $x = 0$ mithin

$$MC = \frac{p^3}{2 p^2} = \frac{1}{2} p.$$

III.

III. Zusatz: Die Lage des Krümmungshalbmessers ist durch die Lage der Normal (§. 256. I. Zus.) mithin durch die Lage der Tangens, oder Größe der Subnormal gegeben (§. 276. IV. und V. Zus.)

§. 282.

Aufgabe: (Fig. 89.)

Den Bogen AM der Parabel zu rectificiren.

I. Auflösung: Wenn man die Länge desselben durch den Parameter p und Abscisse x bestimmen will.

1. Für jedes Stück Z einer krummen Linie ist

$$Z = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$ (§. 267.)

2. Nun ist für die Parabel:

$$y^2 = px, \text{ also } 2ydy = pdx, \text{ und}$$

$$dy = \frac{pdx}{2y} = \frac{pdx}{2\sqrt{px}} = \tfrac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx, \text{ mithin}$$

$$dy^2 = \tfrac{1}{4} px^{-1} dx^2, \text{ und}$$

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (dx^2 + \tfrac{1}{4} px^{-1} dx^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1 + \tfrac{1}{4} px^{-1})^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} dx (x + \tfrac{1}{4} p)^{\frac{1}{2}}, \text{ folglich}$$

3. der Bogen $AM = \int x^{-\frac{1}{2}} dx (x + \tfrac{1}{4} p)^{\frac{1}{2}} + C$

4. Nun steht dieses Differential offenbar unter der Form $x^n dx (a + bx^m)^p$; wo nemlich $n = -\frac{1}{2}$; $m = 1$, $p = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{4} p$, und $b = 1$ ist.

5.

5. Wenn man ferner §. 252. VI. Tab. Nr. 8. $b = 1$; $x = \frac{1}{4} p$, also

$$b x^{\frac{1}{2}} dx (x + a)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} dx (x + \tfrac{1}{4} p)^{\frac{1}{2}}$$ setzt, so ist

6. letztere Differentialgröße unter der Form

$x^r dx (a + bx^m)^p$ enthalten, und $r = \frac{1}{2}$, das Uebrige wie Nr. 4.

7. Ferner ist aus obiger Tabelle VI. Nr. 8.

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx (x + \tfrac{1}{4} p)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{4}(2x + \tfrac{1}{4} p)\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4} px)}$$
$$- \frac{1}{128} p^2 \text{log. nat.} [x + \tfrac{1}{8} p + \sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4} px)}] + C$$

8. Nun ist $(n - r) : m = (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) : 1 = -1$ also eine negative ganze Zahl, folglich läßt sich aus dem Integrale Nr. 7. jenes von Nr. 3. finden (§. 348. Arith.)

9. Man verwechsle nun die Substitutionen Nr. 4. und 6., oder setze $x^{\frac{1}{2}} dx (x + \frac{1}{4} p)^{\frac{1}{2}}$
$= x^n dx (a + bx^m)^p$, also $n = \frac{1}{2}$, und

$x^{-\frac{1}{2}} dx (x + \frac{1}{4} p)^{\frac{1}{2}} = x^r dx (a + bx^m)^p$
mithin $r = -\frac{1}{2}$ so ist

10. $(n - r) : m = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) : 1 = 1$; folglich nach §. 346. Arithm.

$$11. \int x^n dx (a + bx^m)^p = \frac{x^f (a + bx^m)^{p+1}}{bg}$$
$$- \frac{af}{bg} \int x^r dx (a + bx^m)^p + C$$

12. Ausser den Nr. 4 und 9 bestimmten Werthen ist noch

$f = 1 + n - m = -1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, und
$g = 1 + n + m\,p = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$; folglich subſtituirt

13. $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{3}{2}}}{2}$

$- \frac{1}{16}p\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} + C$ mithin

14. $\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} = \frac{8\,x^{\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{3}{2}}}{p}$

$- \frac{16}{p}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} = \frac{8\,x^{\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{3}{2}}}{p}$

$- \frac{4(2x + \frac{1}{4}p)\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}}{p}$

$+ \frac{1}{8}p\ \text{log. nat.}\,[x + \frac{1}{8}p + \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}]$
$+ C$ (Nr. 7.).

15. Nun iſt $\frac{8x^{\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{3}{2}}}{p} = \frac{8x^{\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{4}p)}{p}$

$= \frac{8(x^2 + \frac{1}{4}px)^{\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{4}p)}{p}$

$= \frac{8x + 2p}{p}\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}$.

16. Ferner $\frac{4(2x + \frac{1}{4}p)\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}}{p}$

$= \frac{8x + p}{p}\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}$, alſo

17.

17. $\frac{8x^{\frac{1}{2}}(x+\frac{1}{4}p)^{\frac{3}{2}}}{p} - \frac{4(2x+\frac{1}{4}p)\sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)}}{p}$

$= \frac{8x+2p-8x-p}{p}\sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)}$

$= \sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)}$; folglich

18. $\int x^{-\frac{1}{2}}dx(x+\frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)}$
$+\frac{1}{8}p$ log. nat. $[x+\frac{1}{8}p+\sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)}]$
$+$ C (Nr. 14.) $=$ AM.

19. Wenn nun $x = 0$, so ist für die Parabel auch AM $= 0$, mithin in vorhergehender Gleichung

20. $0 = \frac{1}{8}p$ log. nat. $\frac{1}{8}p + C$, also
$C = -\frac{1}{8}p$ log. nat. $\frac{1}{8}p$; folglich

21. $AM = \sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)} + \frac{1}{8}p$ log. nat. $[x+\frac{1}{8}p$
$+\sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)}] - \frac{1}{8}p$ log. nat. $\frac{1}{8}p$.

22. So wie nun alle Hilfsgrößen entfernt sind, so ist letztere eine vollständige Gleichung.

II. Auflösung: Wenn man den Bogen AM durch den Parameter p und die Ordinate y bestimmen will.

23. $dx = \frac{2ydy}{p}$ (Nr. 2), mithin

$dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$, und

$dx^2+dy^2 = dy^2+\frac{4y^2dy^2}{p^2}$

$= (1+\frac{4y^2}{p^2})dy^2$, mithin

24. $(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + \frac{4y^2}{p^2})^{\frac{1}{2}} dy$

$= (\frac{1}{4}p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{2\,dy}{p}$, also

25. $AM = \int \frac{2}{p} dy\,(\frac{1}{4}p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + C$ (Nr. 1.)

$= \frac{y}{p} \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)}$

$+ \frac{1}{4}p$ log. nat. $[y + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)}] + C$

(§. 252. Tab. VI. Nr. 6.)

36. Nun ist für $y = o$, auch $AM = o$, also

27. $o = \frac{1}{4}p$ log. nat. $\sqrt{\frac{1}{4}p^2} + C$, mithin

$C = -\frac{1}{4}p^2$ log. nat. $\frac{1}{2}p$, folglich

28. $AM = \frac{y}{p} \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)} + \frac{1}{4}p$ log. nat. $[y$

$+ \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)}] - \frac{1}{4}p^2$ log. nat. $\frac{1}{2}p$

$= \frac{y}{p} \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)} + \frac{1}{4}p$ log. nat. $\frac{y + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)}}{\frac{1}{2}p}$

I. Zusatz: Wenn $x = \frac{1}{4}p$ gegeben ist, so wird

$x^2 + \frac{1}{4}px = \frac{1}{16}p^2 + \frac{1}{16}p^2 = \frac{2}{16}p^2$, also

$\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)} = \frac{1}{4}p\sqrt{2}$, mithin Nr. 21 oder Fig. 89.

$AM' = \frac{1}{4}p\sqrt{2} + \frac{1}{8}p$ log. nat. $\frac{\frac{1}{4}p + \frac{1}{8}p + \frac{1}{8}p\sqrt{2}}{\frac{1}{8}p}$

$= \frac{1}{4}p\sqrt{2} + \frac{1}{8}p$ log. nat. $\frac{\frac{3}{8} + \frac{2}{8}\sqrt{2}}{\frac{1}{8}}$

$= \frac{1}{4}p\sqrt{2} + \frac{1}{8}p$ log. nat. $(3 + 2\sqrt{2})$.

Nun ist $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$, mithin

log. nat. $(3 + 2\sqrt{2}) = 2$ log. nat. $(1 + \sqrt{2})$

(§. 229. Arithm.) folglich

$AM' = \frac{1}{4} p \sqrt{2} + \frac{2}{8} p \text{ log. nat. } (1 + \sqrt{2})$
$= \frac{1}{4} p [\sqrt{2} + \text{log. nat. } (1 + \sqrt{2})]$

II. Zusatz Ist hingegen die Ordinate $y = \frac{1}{2} p$, so ist

$AM' = \frac{1}{2} \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{4} p^2)}$
$+ \frac{1}{4} p \text{ log. nat. } \frac{(\frac{1}{2} p + \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{4} p^2)}}{\frac{1}{2} p}$ (Nr. 28.)
$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{4} p^2} + \frac{1}{4} p. \text{ log. nat. } (1 + \sqrt{2})$
$= \frac{1}{4} p [\sqrt{2} + \text{log. nat. } (1 + \sqrt{2})]$ wie im I. Zus.

§. 283.

Aufgabe: (Fig. 89.)

Die vom Bogen AM, und von den rechtwinklichten Coordinaten AP, PM begränzte Ebene AMP der Parabel zu quadriren.

Auflösung:

1. Allgemein ist für jede, durch eine krumme Linie und ihre rechtwinklichten Coordinaten, begränzte Ebene:

$R = \int y \, dx$ (§. 268.)

2. Nun ist für die Parabel

$y^2 = px$; mithin $2ydy = pdx$; $dx = \frac{2y}{p} dy$,

also $ydx = \frac{2y^2}{p} dy$, folglich

3. $AMP = \int \frac{2y^2}{p} dy + C = \frac{2y^3}{3p} + C$

4. Wenn aber $y = o$; so ist auch AMP; folglich eben so $C = o$, also

5.

5. AMP $= \frac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{p} = \frac{2}{3} \cdot \frac{y^2 . y}{p} = \frac{2}{3} \cdot \frac{pxy}{p}$

$= \frac{2}{3} xy.$

§. 284.

Lehrsatz: (Fig. 92.)

Wenn in der Parabel eine beliebige Sehne MR von der Axe AO in D durchschnitten wird, und man setzt das größere Stück der Sehne MD $=$ m, das kleinere RD $=$ n, und ihren spitzigen Winkel mit der Axe MDO $=$ RDA $=$ α, so ist für den Parameter p: das Segment $MARM = \frac{2 \text{ sin. } \alpha^2 (m^3 + n^3)}{3p}$

$- \frac{1}{4} \text{ sin. } 2\alpha \, (m^2 - n^2)$

Beweis:

1. Man ziehe die rechtwinklichten Ordinaten MP, und RS, so ist offenbar

2. Segm. MARM $=$ APM $+$ ASR $-$ $\triangle$DPM $+$ $\triangle$DSR.

3. Nun ist im Dreyecke DPM:

DM : PM $=$ 1 : sin. PDM. oder

m : PM $=$ 1 : sin. α; also PM $=$ m. sin. α.

4. Ferner m : DP $=$ 1 : cos. α; mithin DP $=$ m cos. α.

5. $\triangle DPM = \frac{1}{2}$ DP. PM $= \frac{1}{2} m^2$ sin. α cos. α

$= \frac{1}{4} m^2$ sin. 2 α (§. 306. II. Zus. Trig.)

6.

6. Ferner $APM = \frac{2}{3} \frac{PM^3}{p}$ (§. 283. Nr. 5.)

$$= \frac{2m^3 \sin. \alpha^3.}{3p}$$

7. Eben so ist im rechtwinklichten Dreyecke RSD

$n : RS = 1 : \sin. \alpha$, also $RS = n \sin. \alpha$, und

$n : DS = 1 : \cos. \alpha$, mithin $DS = n \cos. \alpha$

folglich

8. $\triangle RSD = \frac{1}{2} DS. RS = \frac{1}{2} n^2 \sin. \alpha \cos. \alpha$

$= \frac{1}{4} n^2 \sin. 2\alpha$

9. $ARS = \frac{2}{3} \frac{RS^3}{p} = \frac{2n^3 \sin. \alpha^3.}{3p}$

10. Setzt man diese Werthe Nr. 5, 6, 8, 9 in die Gleichung Nr. 2, so ist

11. Segm. $MARM = \frac{2m^3 \sin. \alpha^3}{3p}$

$+ \frac{2n^3 \sin. \alpha^3}{3p} - \frac{1}{4} m^2 \sin. 2\alpha + \frac{1}{4} n^2 \sin. 2\alpha$

$= \frac{2 \sin. \alpha^3 (m^3 + n^3)}{3p} - \frac{1}{4} \sin. 2\alpha (m^2 - n^2)$

Zusatz: Für die Sehne MA wird $n = 0$, folglich

$$\text{Segm. } ALMA = \frac{2m^3 \sin. \alpha^2}{3p} - \frac{1}{4} m^2 \sin. 2\alpha.$$

§. 285.

Aufgabe: (Fig. 89.)

Die Oberfläche des paraboliſchen Sphäroids, welches AMP beſchreibt, zu quadriren.

Auf-

Auflösung:

1. Allgemein ist $Q = \int 2\pi y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + C$
(§. 270. Nr. II.)

2. Nun ist für die Parabel $y^2 = px$, also $2ydy = pdx$, und

$$dx = \frac{2y}{p} dy; \; dx^2 = \frac{4y^2}{p^2} dy^2, \text{ mithin}$$

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (\frac{4y^2}{p^2} dy^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{p} dy, \text{ folglich}$$

3. $2\pi y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi y}{p} (4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} dy$,
mithin in der Parabel

4. $Q = \int \frac{2\pi y}{p} (4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} dy + C$

$$= \frac{2\pi y (4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} dy}{p \cdot \frac{3}{2} \cdot 8ydy} + C \text{ (§. 328. Arith.)}$$

$$= \frac{\pi}{6p} (4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

5. Für $y = 0$, ist offenbar auch $Q = 0$, mithin

$$0 = \frac{\pi}{6p} p^3 + C; \text{ also } C = -\tfrac{1}{6} p^2 \pi \text{ folglich}$$

6. $Q = \frac{\pi}{6p} (4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} p^2 \pi$

$$= \frac{\pi}{6p} (4px + p^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{6} p^2 \pi.$$

§. 286.

Aufgabe (Fig. 89.)

Das paraboliſche Sphäroid, welches AMP beſchreibt, zu cubiren.

Auflöſung:

1. Allgemein iſt $K = \int \pi y^2 dx + C$ (§. 270. I).

2. Für die Parabel iſt $y^2 = px$; $2ydy = pdx$; und

$$dx = \frac{2ydy}{p}; \text{ alſo } \pi y^2 dx = \frac{2\pi y^3}{p} dy; \text{ mithin}$$

3. $$K = \int \frac{2\pi y^3}{p} dy = \frac{2\pi y^4}{4p} + C = \frac{\pi y^4}{2p} + C.$$

4. Für $y = o$, iſt auch $K = o$, folglich auch $C = o$, mithin

5. $$K = \frac{\pi y^4}{2p} = \frac{\pi y^2 px}{2p} = \frac{1}{2} x \pi y^2 = \frac{1}{2} \pi px^2$$

Zuſatz: Das paraboliſche Sphäroid iſt der Hälfte eines Cylinders gleich, welcher mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

III. Abſchnitt.

Von der Ellipſe.

§. 287.

Lehrſatz: (Fig. 87.)

Wenn man $AB = a$ zur Abſciſſenlinie (§. 272. II. Zuſ.) und A zu ihrem Anfangspunct nimmt, ferner den Parameter $= p$, und die einem beliebigen

Puncte M der Ellipse entsprechenden rechtwinklichten Coordinaten x, y setzet, so ist in der Ellipse allgemein:

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a}$$

Beweis:

1. Man lege durch den Punct M der Ellipse eine Ebene zur Grundfläche des Kegels parallel, so ist alles wie §. 274. Nr. 1 — 5, mithin

2. $PM^2 = RP.\ PN.$

3. Ferner ziehe man im Axentriangel durch A und B zu NR die Parallelen AG, BL, so ist

4. $\triangle APN \backsim \triangle ABL$, mithin
$AB : BL = AP : PN$, also

5. $PN = \frac{BL.\ AP}{AB}$

6. Ferner $\triangle ABG \backsim \triangle PBR$, mithin
$AB : AG = BP : RP$, folglich

7. $RP = \frac{AG.\ BP}{AB}$

8. Setzt man diese Werthe Nr. 5 und 7 in die Gleichung Nr. 2, so wird

9. $PM^2 = \frac{AG.\ BP}{AB} \times \frac{BL.\ AP}{AB} = \frac{AG.\ BL}{AB} \times \frac{AP.\ BP}{AB}$

10. Nun ist der erste Factor eine beständige Größe, oder $\frac{AG.\ BL}{AB} = p$, folglich

11. $y^2 = p.\frac{x(a-x)}{a} = \frac{apx}{a} - \frac{px^2}{a}$

$= px - \frac{px^2}{a}$

Zusatz: Da das Quadrat der Ordinate kleiner als das Rechteck aus der Abscisse und dem Parameter ist, so nannte man dieses Mangels wegen die Linie ελλειψις.

§. 288.

Lehrsatz: (Fig. 87.)

Wenn man den Winkel EDH $= \alpha$, und BAL $= \beta$, AB $=$ a setzt, so ist für jede Ellipse der Parameter, oder

$$p = \frac{2a \sin.\beta (\sin.\beta \cos.\alpha - \cos.\beta \sin.\alpha)}{1 + \cos.\alpha}$$

Beweis:

1. Im Dreyecke BAL ist:

AB : BL = sin. ALB : sin. BAL, das ist

a : BL = cos. $\frac{1}{2}\alpha$: sin. β; denn

2. ALB = DAG = 90° — ADC = 90° — $\frac{1}{2}\alpha$

mithin

sin. ALB = cos. $\frac{1}{2}\alpha$, also

3. $BL = \frac{a \sin.\beta}{\cos.\frac{1}{2}\alpha}$

4. Ferner im Dreyecke ABG ist

AB : AG = sin. BGA : sin. ABG.

5. Nun ist BGA $=$ 180° $-$ AGD, also

sin. BGA $=$ sin. AGD $=$ cos. $\frac{1}{2}\alpha$

6. Ferner ist

ABG $=$ ABD $=$ 180° $-$ α $-$ DAB

$=$ 180° $-$ α $-$ (180° $-$ β) $=$ $\beta - \alpha$, also sin. ABG $=$ sin. $(\beta - \alpha)$, folglich Nro. 4 substituirt, wird

7. a : AG $=$ cos. $\frac{1}{2}\alpha$: sin. $(\beta - \alpha)$, mithin

8. $$AG = \frac{a \sin.(\beta - \alpha)}{\cos.\frac{1}{2}\alpha}$$

9. Nun ist für die Ellipse

$$p = \frac{BL.AG}{AB}$$ (§. 387. Nr. 10.), also

10. $$p = \frac{a \sin.\beta}{\cos.\frac{1}{2}\alpha} \cdot \frac{a \sin.(\beta - \alpha)}{\cos.\frac{1}{2}\alpha} : a$$ (N. 3 und 8)

$$= \frac{a \sin.\beta \sin.(\beta - \alpha)}{\cos.\frac{1}{2}\alpha^2}$$

$$= \frac{a \sin.\beta(\sin.\beta\cos.\alpha - \cos\beta\sin.\alpha)}{\frac{1 + \cos.\alpha}{2}}$$ (§. 307. I. Zus. Trig.) (§. 308. IV. Zus. Trig.)

$$= \frac{2a \sin.\beta(\sin.\beta\cos.\alpha - \cos.\beta\sin.\alpha)}{1 + \cos.\alpha}$$

1. Zusatz: Eine Linie, in welcher $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, ist eine Ellipse. Denn die beständigen Größen

p,

p, a mögen jeden beliebigen Werth haben, so läßt sich nach dem Lehrsatz für einen Kegel, wo der Winkel EDH $=$ α entweder gegeben, oder beliebig angenommen ist, allemal der Winkel β $=$ BAH so bestimmen, daß der Schnitt eine Ellipse giebt, die mit der gegebenen Linie einerley ist.

II. Zusatz: Da $y = \pm\sqrt{(px - \frac{px^2}{a})}$, so theilt AB alle auf ihr senkrecht stehenden Sehnen in zwey gleiche Theile, und ist also die Axe (§. 255.), man heißt sie, da es für die Ellipse noch eine Axe giebt, die große oder Zwergaxe (axis major, axis tranversus).

III. Zusatz: Für $x = o$ sowohl, als $x = a$, ist allemal $y = o$, mithin ist A sowohl als B ein Scheitelpunct der Ellipse, und sie selbst eine in sich zurückkehrende Linie.

IV. Zusatz: Für $x = \frac{1}{2} a$, wird $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{ap}$; denn

$$y^2 = \frac{1}{2} ap - \frac{\frac{1}{4} a^2 p}{a} = \frac{1}{4} ap; \text{ also } y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{ap}.$$

V. Zusatz: Setzt man den Parameter der großen Axe gleich, oder $p = a$, so ist $y^2 = ax - x^2$, folglich die Ellipse ein Kreis.

VI. Zusatz: Nimmt man hingegen $a = \infty$, so wird $y^2 = px$, das heißt, man kann sich die Parabel als eine Ellipse vorstellen, in welcher die große Axe unendlich ist.

VII.

VII. Zusatz: Für eine Abscisse, die im Verhältniße zur großen Axe sehr klein ist, wird $\frac{px^2}{a}$ ein sehr kleiner Bruch, also y^2 beynahe $= px$; man kann also nahe am Scheitel der Ellipse ihren Bogen als einen Theil der Parabel vom nemlichen Parameter nehmen.

§. 289.

Lehrsatz: (Fig. 93.)

Wenn man den Mittelpunct C der großen Axe AB zum Anfangspunct der Abscissen nimmt, und letztere $= u$ setzt, so ist $y^2 = \frac{1}{4} ap - \frac{pu^2}{a}$

Beweis:

1. $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ (§. 287).

2. Nun ist $CP = AC - AP$, oder $u = \frac{1}{2} a - x$, mithin

3. $x = \frac{1}{2} a - u$, und

4. $x^2 = \frac{1}{4} a^2 - au + u^2$, also

5. $y^2 = p(\frac{1}{2} a - u) - \frac{p}{a}(\frac{1}{4} a^2 - au + u^2)$ (N. 1)

$$= \frac{1}{2} ap - pu - \frac{1}{4} ap + pu - \frac{pu^2}{a}$$

$$= \frac{1}{4} ap - \frac{pu^2}{a}$$

I. Zusatz: Für $u = o$, wird $y = \frac{1}{4} ap$, also auch $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{ap}$ ein größtes, das ist dem Mittelpuncte der großen Axe entspricht die größte Ordinate.

II. Zusatz: Für $y = \frac{1}{2} p$, also $y^2 = \frac{1}{4} p^2$, wird

$$\frac{1}{4} p^2 = \frac{1}{4} ap - \frac{pu^2}{a}, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{4} p = \frac{1}{4} a - \frac{u^2}{a}; \text{ mithin}$$

$u^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} a p$; folglich

$u = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - ap)}$, das heißt:

Auf jeder Seite des Mittelpunctes giebt es in gleicher Entfernung auf der großen Axe einen Punct, wo die Ordinate dem halben Parameter gleich ist, oder einen Brennpunct (§. 273. b).

III. Zusatz: Wenn man die Entfernungen $CF = cf$ der beyden Brennpuncte vom Mittelpuncte C mit e bezeichnet, so ist $e = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - ap)}$.

IV. Zusatz: $AF = \frac{1}{2} a - e = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - ap)}$
und $Af = \frac{1}{2} a + e = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - ap)}$.

V. Zusatz: Nimmt man die durch den Mittelpunct C auf der großen Axe senkrecht stehende Linie DE zur Abscissenlinie, und C als ihren Anfangspunct, so ist

die Abscisse $Cm = x = PM = y$;

die Ordinate $mM = y = CP = u$; mithin

$x^2 = \frac{1}{4} ap - \frac{py^2}{a}$ (Lehrs.), und

$\frac{p\,y^2}{a} = \frac{1}{4}\,ap - x^2$, also

$y^2 = \frac{1}{4}\,a^2 - \frac{a\,x^2}{p}$, folglich

$y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 - \frac{a\,x^2}{p})}$, das ist, DE theilt alle auf ihr senkrecht stehenden Sehnen in 2 gleiche Theile, mithin ist sie eine Axe der Ellipse (§. 255.).

§ 290.

Erklärung: (Fig. 93.)

Die durch den Mittelpunct auf der großen Axe AB senkrecht errichtete Linie, oder Axe (§. 289. V. Zus.), wenn sie beyderseits bis an die Ellipse gezogen wird, oder DE heißt die **kleine** oder **vereinigte Axe** der **Ellipse** (axis minor, axis conjugatus) uud wird in der Folge allemal mit c bezeichnet.

I. **Zusatz:** $c = \sqrt{ap}$; denn $\frac{1}{2}\,c = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$ (§. 289. I. Zus.) mithin ist

II. **Zusatz:** die kleine Axe die mittlere geometrische Proportional zwischen der großen Axe und dem Parameter, so wie letzterer die dritte Proportional zur großen und kleinen Axe ist.

III. **Zusatz:** $y^2 = \frac{c^2\,x}{a} - \frac{c^2\,x^2}{a^2}$, denn p

$= \frac{c^2}{a}$ (II. Zus.)

setzt

setzt man nun diesen Werth in die Gleichung §. 287. so erhält man die aufgestellte Gleichung für die Ellipse zwischen ihren beyden Axen.

IV. Zusatz: Setzt man $a = c$, so wird $y^2 = ax - x^2$, also die Ellipse zum Kreise, oder letzterer ist eine Ellipse, wo beyde Axen einander gleich sind.

V. Zusatz: Nimmt man auf der großen Axe ihren Mittelpunct C als Anfangspunct der Abscissen, oder setzt in der Gleichung des IIIten Zusatzes

$u = \frac{1}{2} a - x$, also

$x = \frac{1}{2} a - u$, und $x^2 = \frac{1}{4} a^2 - au + u^2$.

so wird

$$y^2 = \frac{c^2}{a}\left(\tfrac{1}{2}a - u\right) - \frac{c^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - au + u^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} c^2 - \frac{c^2 u}{a} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^2 u}{a} - \frac{c^2 u^2}{a^2}$$

$$= \tfrac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2\right)$$

VI. Zusatz Die Entfernung eines Brennpunctes vom Mittelpuncte der großen Axe, oder $e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$ (§. 289. III. Zus.)

VII. Zusatz: Für den Kreis wird $e = o$, das ist, beyde Brennpuncte fallen im Mittelpuncte des Kreises zusammen.

VIII. Zusatz: Beschreibt man aus dem Mittelpuncte C der größern Axe mit ihrer Hälfte CA einen Halbkreis AM'B, so ist $PM'^2 = AP.PB = ax - x^2$,

und

und in der Ellipse $PM^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$ (III. Zuf.)

$= \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2)$, alſo $PM^2 : PM'^2$

$= \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2) : ax - x^2 = \frac{c^2}{a^2} : 1$

$= c^2 : a^2$, mithin $PM : PM' = c : a$

IX. Zuſatz: Wenn für eine Linie von den nachſtehenden Gleichungen:

1. $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ (§. 287.)

2. $y^2 = \frac{1}{4} ap - \frac{pu^2}{a}$ (§. 289.)

3. $y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$ (III. Zuf.)

4. $y^2 = \frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2}$ (V. Zuf.)

eine davon erwieſen iſt, ſo iſt die Linie eine Ellipſe. Denn ſo wie die drey letztern Gleichungen aus der erſten abgeleitet ſind, ſo folgt die erſte aus jeder der drey übrigen; wenn aber von einer Linie die erſte Gleichung gilt, ſo iſt ſie eine Ellipſe (§. 288. I. Zuf.), folglich auch, wenn eine der 3 übrigen Statt hat.

X. Zuſatz: Nimmt man vom Mittelpuncte C aus auf der kleinen Axe die Abſciſſen, ſo iſt die Abſciſſe $Cm = PM = y$, die Ordinate $mM = CP = u$; da nun $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(\frac{1}{4} a^2 - u^2)$ (V. Zuf.)

alſo

also $\frac{a^2 y^2}{c^2} = \frac{1}{4} a^2 - u^2$, und $u^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 y^2}{c^2}$

$= \frac{a^2}{c^2} (\frac{1}{4} c^2 - y^2)$ das ist man erhält auf der kleinen Axe als Abscissenlinie eine ähnliche Gleichung, wie für die große Axe.

§. 291.

Lehrsatz: (Fig. 94.)

Wenn man von den beyden Brennpuncten F, f, nach einem beliebigen Puncte M der Ellipse gerade Linien ziehet, so ist ihre Summe allemal der großen Axe gleich; oder $FM + fM = a$.

Beweis:

1. Man ziehe die rechtwinklichten Ordinate PM, so ist
2. $FM^2 = PM^2 + PF^2$, und eben so
3. $fM^2 = PM^2 + Pf^2$.
4. Nimmt man nun C zum Anfangspunct der Abscissen, uud setzt $CP = u$, und $CF = Cf = e = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)}$ (§. 290 VI. Zus.); so ist
5. $PF = e - u = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)} - u$, also $PF^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} c^2 - u \sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2$; ferner
6. $PM^2 = \frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2}$ (§. 290. V. Zus.), folglich diese beyden Werthe Nr. 2 gesetzt geben

7. $FM^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2} + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2$

$- u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2$

$= \frac{1}{4}a^2 - u\sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2 - c^2}{a^2}u^2$

folglich

8. $FM = \pm(\frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a})$ (§. 100. I. Zuf. und 121. Arithm.)

9. Von diesen beyden Werthen der Gleichung ist jener der wahre, welcher eine positive Größe für FM giebt.

10. Nun kann u nie größer als $\frac{1}{2}a$ seyn, und wenn selbst $u = \frac{1}{2}a$ gesetzt wird, so ist $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$ noch eine positive Größe, um so mehr also, wenn $u < \frac{1}{2}a$ genommen wird; folglich giebt die Gleichung:

$FM = \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$ allemal eine positive Größe.

11. Wollte man hingegen das untere Zeichen oder $FM = -\frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$ nehmen, so giebt solches eine negative Größe, weil selbst beym größten Werthe von u, oder für $u = \frac{1}{2}a$, noch $\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$ ist; also giebt Nr. 10. den wahren Werth für FM.

12. Ferner ist $Pf = e + u = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)} + u$, also

$Pf^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2$,
mithin Nr. 3. wenn man diesen Werth und jenen aus Nr. 6 substituirt

13. $fM^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2$
$+ \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$
$= \frac{1}{4}a^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2 - c^2}{a^2}u^2$;
folglich

14. $fM = \pm\left(\frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}\right)$; da aber nur das obere Zeichen eine positive Größe giebt, so ist
$fM = \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$; folglich

15. $FM + fM = \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} + \frac{1}{2}a$
$+ \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$ (Nr. 10. und 14.) $= a$

I. Zusatz: Zieht man nach dem Endpunct D der kleinen Axe von den beyden Brennpuncten gerade Linien, so ist jede der halben großen Axe gleich, denn $FD + fD = a$, ferner $FD = fD$, also jede $= \frac{1}{2}a$.

II. Zusatz: Wenn von einer Ellipse die Lage der großen Axe AB gegeben ist, so findet man ihre beyden Brennpuncte, wenn man die große Axe halbirt, und durch C die kleine Axe DE errichtet, und von D aus mit $\frac{1}{2}a$ einen Kreis beschreibt,

so

so schneidet solcher die große Axe in den beyden Brennpuncten.

§. 292.

Lehrsatz: (Fig. 94.)

Wenn in der Sehne AB = a einer krummen in sich selbst zurückkehrenden Linie AMDBE zwey Puncte F, f von so einer Beschaffenheit sind, daß für jeden Punct M der krummen Linie allemal FM + fM = a, so ist die krumme Linie eine Ellipse, die Sehne AB ihre große Axe, und F, f die beyden Brennpuncte derselben.

Beweis:

1. Es ist fM + FM = a (per hyp.) setzt man ferner
   fM − FM = d so ist nach §. 86. Arithm.
2. $fM = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} d$, und
   $FM = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} d$, mithin
3. $fM^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} ad + \frac{1}{4} d^2$, und
4. $FM^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{2} ad + \frac{1}{4} d^2$, folglich
5. $fM^2 - FM^2 = ad$.
6. Nun halbire man Ff in C, und errichte durch C einen Perpendikel DE, bis solcher zu beyden Seiten mit der krummen Linie zusammenstoßt.
7. Ziehe ferner die geraden Linien FD, FE, fD, fE, so ist
8. $\triangle FCD \cong \triangle fCD$, mithin

FD = fD = $\frac{1}{2}$ a, weil ihre Summe = a ist.

9. Eben so ist △FCE ≅ △fCE, also auch
FE = fE = $\frac{1}{2}$ a, mithin

10. FD = FE, also auch CD = CE = $\frac{1}{2}$ DE (§. 39. II. Zus. Geom.) oder für DE = c, ist CD = CE = $\frac{1}{2}$ c.

11. Ferner ist fA + FA = FB + fB = a (per hyp.), oder fF + 2 FA = Ff + 2 fB; also FA = fB, mithin

12. AF + FC = Bf + fC = $\frac{1}{2}$ AB, oder AC = BC = $\frac{1}{2}$ a, also ist

13. C der gemeinschaftliche Mittelpunct der beyden Sehnen a, c.

14. Im rechtwinklichten Dreyecke FCD ist
$CF^2 = FD^2 - CD^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} c^2$ (Nr. 8. und 10.), mithin
$CF = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)}$ (§. 97. Geom.) = Cf. (Nr. 6.)

15. Nun ziehe man die rechtwinklichte Ordinate PM = y, und setze ihre Abscisse vom Mittelpunct an, oder CP = u, so ist

16. $PF = CF - CP = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)} - u$, und

17. $Pf = Cf + CP = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)} + u$.

18. In den rechtwinklichten Triangeln fPM, FPM ist

19. $fM^2 = PM^2 + Pf^2 = y^2 + \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} c^2 + u \sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2$, und

20. $FM^2 = PM^2 + PF^2 = y^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 - u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2$, also

21. $fM^2 - FM^2 = 2u\sqrt{(a^2 - c^2)} = ad$ (Nr. 5.). mithin

22. $d = \frac{2u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$, und

$$d^2 = \frac{4u^2(a^2 - c^2)}{a^2} = 4u^2 - \frac{4c^2u^2}{a^2}$$

23. Ferner erhält man aus Nr. 3 und 19. nachstehende Gleichung:

$y^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{4}d^2$, oder

$y^2 - \frac{1}{4}c^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2 = \frac{1}{2}ad + \frac{1}{4}d^2$

$= u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$ (N. 22),

also

24. $y^2 - \frac{1}{4}c^2 = -\frac{c^2u^2}{a^2}$, folglich

$$y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$$

25. Nun ist $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2})}$ folglich theilet a alle auf ihr senkrechte Sehnen in gleiche Theile, ist also eine Axe der krummen Linie (§. 255.)

26. Nimmt man DE zur Abscissenlinie und C als ihren Anfangspunct, so ist die Abscisse $Cm = PM$

PM = y, und die Ordinate Mm = CP = u, folglich Nr. 24. wird

$u^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 y^2}{c^2}$, und

$u = \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 y^2}{c^2})}$, mithin ist c ebenfalls eine Axe.

27. Es ist aber FD > CD, oder $\frac{1}{2}$ a > $\frac{1}{2}$ c (Nr. 8 und 10.) also a > c mithin a die größere und c die kleinere Axe.

28. Da nun für diese beyden Axen und die Abscissen vom Mittelpunct an gerechnet $y^2 = \frac{1}{4} c^2 - \frac{cu^2}{a^2}$ ist, so ist die krumme Linie eine Ellipse (§. 290. IX. Zus.); und

29. weil endlich CF = Cf = $\frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)}$ (Nr. 14.), so sind F, f die beyden Brennpuncte derselben (§. 290. VI. Zus.)

Zusatz: Wenn man also auf einer geraden Linie AB zwey von den Endespuncten A, B gleich weit abstehende Puncte F, f, ferner eine Schnur von der Länge AB nimmt, und das eine End dieser Schnur in F, das andere in f befestiget, und solche mit einem Bleystifte auf jeder Seite gespannt von A bis B dreht, so beschreibt der Bleystift eine Ellipse.

§. 293.

Lehrsätze: (Fig: 95.)

In der Ellipse ist für den Punct M

I. die Subtangens $PT = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$

II. die Subnormal $PN = \frac{ap - 2px}{2a} = \frac{pu}{a}$

Beweis:

1. Für jede krumme Linie ist Subt. $= \frac{ydx}{dy}$ (§. 257. I.)

2. Nun für die Ellipse ist:

$y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ (§. 287.), mithin

$2ydy = pdx - \frac{2pxdx}{a} = \frac{ap - 2px}{a} dx;$

mithin

$\frac{2ay}{ap - 2px} = \frac{dx}{dy}$, also

$\frac{ydx}{dy} = \frac{2ay^2}{ap - 2px} = \frac{2a(px - \frac{px^2}{a})}{ap - 2px}$

$= \frac{2a^2px - 2apx^2}{a^2p - 2apx} = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$, folglich

in der Ellipse

3. Subt. $PT = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$ Nr. I.

4.

4. Ferner ist allgemein Subnorm. $= \frac{ydy}{dx}$ (§. 258. I.)

5. In der Ellipse ist aber $2ydy = \frac{ap - 2px}{a} dx$,

mithin

$\frac{ydy}{dx} = \frac{ap - 2px}{2a}$; folglich

6. Subnormal $PN = \frac{ap - 2px}{2a} = \frac{p}{a}(\frac{1}{2}a - x)$

$= \frac{p}{a} u$ (§. 289. Nr. 3.) $= \frac{pu}{a}$ Nr. II.

I. Zusatz: Nimmt man die Abscisse vom Mittelpuncte, oder $u = \frac{1}{2}a - x$ (§. 290. V. Zus.) also $x = \frac{1}{2}a - u$, so ist $2ax - 2x^2 = \frac{1}{2}a^2 - 2u^2$

$= \frac{a^2 - 4u^2}{2}$, ferner $a - 2x = 2u$, also

$\frac{2ax - 2x^2}{a - 2x} = \frac{a^2 - 4u^2}{4u}$, oder

Subt. $PT = \frac{a^2 - 4u^2}{4u}$

II. Zusatz: Aus der Subtangens PT und Ordinate PM läßt sich nun allemal leicht die Tangens TM; so wie aus der Subnormal PN und der Ordinate PM die Normal MN finden (§. 97 Geom.)

§. 294.

Aufgabe: (Fig. 95.)

Für einen gegebenen Punct M der Ellipse eine Tangens zu ziehen.

I. Auflösung:

1. Man berechne die Subtangens PT (§. 293.) und
2. trage solche auf der verlängerten großen Axe auf.
3. Nun ziehe man von T nach M die gerade Linie TQ, so berührt solche die Ellipse im Puncte M.

Beweis:

Die Tangens geht durch M und T (§. 256.), zwischen 2 Puncten giebt es aber nur eine gerade Linie.

II. Auflösung:

4. Man ziehe die beyden Radios Vectores FM, fM,
5. verlängere letztern um MR = MF, und
6. halbire den Winkel FMR durch die gerade Linie MT, so ist letztere die gesuchte Tangens.

Beweis:

7. Man ziehe FR, so steht MT auf ihr senkrecht, und halbirt sie; ferner ist fR = fM + FM (ex constr.) = a (§. 291.)
8. Würde nun MT ausser M noch einen andern Punct m mit der Ellipse gemein haben, so ziehe man
9. die geraden Linien Fm, fm, und Rm.
10. Nun ist Fm = Rm (§. 38 III. Zus. Geom.) mithin müßte

II. $Rm + fm = Fm + fm = a$ (§. 291.) $= fR$ (Nr. 7.) seyn, welches unmöglich ist (§. 35. Geom.)

I. Zusatz: Für einen Punct M der Ellipse giebt es nur eine Tangens MT; denn durch den Puuct M ist die Subtangens PT (§. 293.), also der Punct T auf der großen Axe vollkommen bestimmt, zwischen zwey Puncten T und M giebt es aber nur eine gerade Linie.

II. Zusatz: Die Tangens MT halbirt allemal den Winkel FMR, welchen der eine Radius Vector FM mit der Verlängerung MR des andern einschließt (II. Aufl. und I. Zus.).

III. Zusatz: Um für einen gegebenen Punct M der Ellipse die Normal zu ziehen, darf man nur erst die Tangens verzeichnen, und auf ihr durch den Punct M einen Perpendikel MN errichten, und bis zur Axe verlängern, so ist solcher die gesuchte Normal (§. 256. b. α)

IV. Zusatz: Die beyden Radii Vectores FM, fM machen mit der Tangens TMQ gleiche Winkel, oder $fMQ = FMT$.
Denn $FMT = RMT$ (II. Zus.)
$fMQ = RMT$ als Vertikalwinkel, mithin
$fMQ = FMT$.

V. Zusatz: Verlängert man FM fbis S und eben so fM bis R, so ist ebenfalls $RMT = SMQ$.

VI.

VI. Zusatz: Die Winkel der beyden Linien FM und fM mit der Normal MN sind gleich, oder fMN = FMN.

Denn QMf + fMN = 90° = TMF + FMN.

Nun ist aber QMf = TMF (IV. Zusatz) also auch fMN = FMN.

VII. Zusatz: Eben so schliessen die verlängerten Linien fR, FS mit der Verlängerung Mn der Normale gleiche Winkel ein, oder RMn = SMn.

Anwendung: Auf den Zusätzen IV — VII. beruhet der Beweis, daß sich Strahlen vom Schalle sowohl, als vom Lichte, welche aus einem Brennpuncte der Ellipse herkommen, sich im andern sammeln, und an der erhabenen Seite, jene Strahlen, welche in der Richtung SM kommen, nach der Richtung MR zurückgeworfen werden.

§. 295.

Lehrsatz: (Fig. 96.)

Wenn man durch den Berührungspunct M der Tangens TM, und den Mittelpunct C der großen Axe AB, die Sehne MG, und eine andere Sehne IH durch eben den Mittelpunct C zur Tangens parallel zieht, erstere Sehne oder MG zur Abscissenlinie, und C zum Anfangspunct der Abscissen nimmt, ferner die Ordinaten RO, IC parallel zur Tangens TM sind, und $CM = \frac{1}{2} m$; $CI = \frac{1}{2} n$, die Abscisse $CO = w$, und die Ordinate $RO = Z$ gesetzt wird, so ist:

$$Z^2 = \frac{n^2}{m^2}\left(\tfrac{1}{4}m^2 - w^2\right)$$

Beweis:

1. Man ziehe aus O, M und R auf die große Axe die Perpendikel OQ, MP, RV, so ist der bisherigen Bezeichnung gemäß:

2. $CA = \frac{1}{2}a$; $CP = u$, $PM = y$; Subt. $PT = s$; tang. $TM = t$.

3. Durch O ziehe man ferner zur großen Axe die Parallele ON, bis solche mit der verlängerten VR in N zusammenstoßt, so ist

4. $\triangle RNO \sim \triangle TPM$; denn $N = P = 90°$, und $NOR = 90° - ROQ = 90° - r = 90° - TMP = MTP$, also

5. $MT : PM = OR : NR$, oder $t : y = Z : NR$, mithin

$$NR = \frac{yZ}{t}.$$

6. $MT : PT = RO : NO$, oder $t : s = Z : NO$, also

$$NO = \frac{sZ}{t}.$$

7. Ferner $\triangle COQ \sim \triangle CMP$, mithin $CM : PM = CO : OQ$, das ist $\frac{1}{2}m : y = w : OQ$, folglich

$$OQ = \frac{2yw}{m}$$

8. $CM : CP = CO : CQ$, oder
$\frac{1}{2} m : u = w : CQ$, alſo

$$CQ = \frac{2uw}{m}, \text{ und}$$

9. $RV = NV - NR = OQ - NR$

$$= \frac{2yw}{m} - \frac{yZ}{t} \text{ (Nr. 5. und 7.)}$$

10. Ferner $CV = CQ + QV = CQ + ON$

$$= \frac{2uw}{m} + \frac{sZ}{t} \text{ (Nr. 6 und 8).}$$

11. Noch iſt $RV^2 = \frac{c^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - CV^2)$ (§. 29a.

V. Zuſ.) alſo

$\frac{a^2}{c^2} RV^2 = \frac{1}{4}a^2 - CV^2$; die Werthe Nr. 9

und 10 ſubſtituirt,

$$\frac{a^2}{c^2}\left(\frac{4y^2w^2}{m^2} - \frac{4y^2wZ}{mt} + \frac{y^2Z^2}{t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}a^2 - \frac{4u^2w^2}{m^2} - \frac{4suwZ}{mt} - \frac{s^2Z^2}{t^2}; \text{ oder}$$

$$\frac{4a^2y^2w^2}{c^2m^2} - \frac{4a^2y^2wZ}{c^2mt} + \frac{a^2y^2Z^2}{c^2t^2}$$

$$= \frac{1}{4}a^2 - \frac{4u^2w^2}{m^2} - \frac{4suwZ}{mt} - \frac{s^2Z^2}{t^2}, \text{ alſo}$$

12. $$\left(\frac{a^2y^2}{c^2t^2} + \frac{s^2}{t^2}\right)Z^2 + \left(su - \frac{a^2y^2}{c^2}\right)\frac{4wZ}{mt}$$

$$+ \left(\frac{4a^2y^2}{c^2m^2} + \frac{4u^2}{m^2}\right)w^2 = \frac{1}{4}a^2$$

13. Nun ist $us = u. \frac{a^2 - 4u^2}{4u}$ (§. 293. I. Zuſ.)

$= \frac{1}{4} a^2 - u^2$.

14. Ferner $\frac{a^2}{c^2} y^2 = \frac{a^2}{c^2} \times \frac{c^2}{a^2} (\frac{1}{4} a^2 - u^2)$ (§. 290. V. Zuſ.) $= \frac{1}{4} a^2 - u^2$, folglich

15. $su - \frac{a^2 y^2}{c^2} = o$, mithin

16. $(\frac{a^2 y^2}{c^2 t^2} + \frac{s^2}{Z^2}) Z^2 + (\frac{4a^2 y^2}{c^2 m^2} + \frac{4u^2}{m^2}) w^2$

$= \frac{1}{4} a^2$ (Nr. 12.)

17. Um nun die beyden Coefficienten, welche für den gegebenen Punct M lauter beſtändige Größen enthalten, zu beſtimmen, ſetze man erſtern $= A$, den andern $= B$, oder:

$AZ^2 + Bw^2 = \frac{1}{4} a^2$.

18. Für $w = o$, das iſt, wenn die Ordinate durch den Mittelpunct C der großen Axe geht, fällt RO mit IC zuſammen, alſo $Z = \frac{1}{2} n$; folglich $A \frac{1}{4} n^2 = \frac{1}{4} a^2$; und daher

$$A. = \frac{a^2}{n^2}$$

19. Für $w = CM = \frac{1}{2} m$ hingegen iſt RO, das iſt $Z = o$, alſo $B \frac{1}{4} m^2 = \frac{1}{4} a^2$; alſo

$$B = \frac{a^2}{m^2}$$

20. Setzt man dieſe beyden Werthe in die Gleichung Nr. 16. oder Nr. 17., ſo iſt:

$$\frac{a^2}{n^2} Z^2 + \frac{a^2}{m^2} w^2 = \frac{a^2}{4}, \text{ oder}$$

$$\frac{Z^2}{n^2} + \frac{w^2}{m^2} = \tfrac{1}{4}; \text{ und } \frac{Z^2}{n^2} = \tfrac{1}{4} - \frac{w^2}{m^2}, \text{ also}$$

$$21.\ Z^2 = n^2 \left(\tfrac{1}{4} - \frac{w^2}{m^2}\right) = \frac{n^2}{m^2} \left(\tfrac{1}{4} m^2 - w^2\right)$$

I. Zusatz: Da $Z = \pm \sqrt{\frac{n^2}{m^2} \left(\tfrac{1}{4} m^2 - w^2\right)}$ so entsprechen jeder Abscisse CO zwey gleiche Ordinaten OR, OS, die auf verschiedenen Seiten liegen, mithin halbirt die Abscissenlinie, oder Sehne MG die Ellipse, und ist also ein Diameter derselben (§. 255.)

II. Zusatz: Da sich für jede andere Sehne HI, welche ebenfalls durch den Mittelpunct C der großen Axe geht, eine ähnliche Gleichung construiren läßt, so ist jede Sehne, in welcher der Mittelpnnct der großen Axe liegt ein Diameter der Ellipse.

III. Zusatz: Für w oder CO = o, wird $Z = \pm \tfrac{1}{2} n$, das ist RO fällt mit IC, und OS mit CH zusammen, also IC = CH (I. Zus.), und IH wird vom Diameter MG im Mittelpuncte der großen Axe halbirt; mithin auch umgekehrt, wenn man HI zur Abscissenlinie nimmt, so wird von ihr MG ebenfalls halbirt, das ist, alle Durchmesser halbiren einander im Mittelpuncte der großen Axe.

§. 296.

§. 296.

Erklärung: (Fig. 97.)

Wenn man durch den einen Endespunct M, eines Diameters MG, eine Tangens der Ellipse, und mit dieser Tangens den Diameter IH parallel zieht, so heißen die beyden Diameter MG, IH **conjugirte Diameter** (Diametri conjugatae)

§. 297.

Lehrsatz: (Fig. 97.)

Die Summe der Quadrate der beyden conjugirten Diameter MG, IH, ist der Summe der Quadrate der beyden Axen gleich, oder wenn man MG = m; IH = n setzt, so ist $m^2 + n^2 = a^2 + c^2$.

Beweis:

1. Man ziehe nebst der Tangens MT, die beyden rechtwinklichten Ordinaten MP, HK auf die große Axe, und setze

2. CP = u; PM = y; CK = w; HK = Z; so ist

3. $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - (u^2)$ (§. 290. V. Zus.), und

$$\frac{a^2}{c^2}y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2, \text{ folglich}$$

4. $u^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{c^2}y^2 = \frac{a^2}{c^2}(\frac{1}{4}c^2 - y^2)$.

5. $PT^2 = \frac{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)^2}{u^2}$ (§. 293. I. Zuf.)

6. $Z^2 = \frac{c^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - w^2)$. mithin ebenfalls

7. $w^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{c^2}Z^2 = \frac{a^2}{c^2}(\frac{1}{4}c^2 - Z^2)$.

8. Nun ist $\triangle MPT \backsim \triangle CKH$; denn $P = K = 90°$
und
$HCK = MTP$ (§. 45. II. Geom.) alſo

9. $PM : PT = HK : CK$, mithin auch
$PM^2 : PT^2 = HK^2 : CK^2$.

10. Subſtituirt man in letzterer Proportion die Werthe aus Nr, 3 — 7, ſo iſt:

11. $\frac{c^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - u^2) : \frac{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)^2}{u^2}$

$= Z^2 : \frac{a^2}{c^2}(\frac{1}{4}c^2 - Z^2)$, oder

$1 : \frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u^2} = Z^2 : \frac{1}{4}c^2 - Z^2$, alſo

$Z^2(\frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u^2} + 1) = \frac{1}{4}c^2$, oder

$Z^2(\frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2 + u^2}{u^2}) = Z^2 \cdot \frac{a^2}{4u^2} = \frac{1}{4}c^2$,

alſo

12. $Z^2 = \frac{e^2u^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} \times \frac{a^2}{c^2}(\frac{1}{4}c^2 - y^2)$ (Nr. 4.)

$= \frac{1}{4}c^2 - y^2$, folglich

13. $Z^2 + y^2 = \frac{1}{4} c^2$

14. Eben ist auch $\frac{c^2 u^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} (\frac{1}{4} a^2 - w^2)$
(Nr. 6 und 12.), also
$u^2 = \frac{1}{4} a^2 - w^2$, folglich

15. $u^2 + w^2 = \frac{1}{4} a^2$.

16. Endlich ist $CM = \frac{1}{2}$ MG (§. 295. III. Zus.)
$= \frac{1}{2} m$;
und eben so $CH = \frac{1}{2} HI = \frac{1}{2} n$; mithin

17. $CP^2 + PM^2 = CM^2$, oder $u^2 + y^2 = \frac{1}{4} m^2$;
und $CK^2 + HK^2 = CH^2$ oder $w^2 + Z^2$
$= \frac{1}{4} n^2$; folglich

18. $u^2 + w^2 + y^2 + Z^2 = \frac{1}{4} m^2 + \frac{1}{4} n^2$
$= \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} c^2$ (Nr. 13 und 15). und

19. $m^2 + n^2 = a^2 + c^2$.

§. 298.

Lehrsatz: (Fig. 97.)

Wenn wieder m und n die beyden conjugirten Diameter MG, IH, und q den eingeschlossenen Winkel MCH, ferner a die große, und c die kleine Axe der Ellipse bezeichnen, so ist $mn \sin. q = ac$.

Beweis:

1. Man ziehe die rechtwinklichten Ordinaten $MP = y$, $HK = Z$ auf die große Axe, setze noch $CP = u$; $CK = w$.

2. Ferner ziehe man für die Puncte M und H der Ellipse die Tangenten MT, HV, so ist wieder wie §. 297. Nr. 12.

3. $Z^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2}$; mithin $Z = \frac{cu}{a}$, und also

$$uZ = \frac{cu^2}{a}.$$

4. Ferner $\triangle HKV \sim \triangle MPC$, mithin

$$HK^2 : KV^2 = PM^2 : CP^2.$$

5. Nun ist: $HK^2 = Z^2 = \frac{c^2}{a^2} (\frac{1}{4} a^2 - w^2)$ (§. 290 V. Zus.);

$$KV = \frac{a^2 - 4w^2}{4w} \text{ (§. 293. I. Zus.)} = \frac{\frac{1}{4}a^2 - w^2}{w}$$

$$\text{also } KV^2 = \frac{(\frac{1}{4}a^2 - w^2)^2}{w^2}; \; PM^2 = y^2, \; CP^2$$

$$= u^2 = \frac{a^2}{c^2} (\tfrac{1}{4} c^2 - y^2) \text{ (§. 290. X. Zus.)},$$

folglich

6. $$\frac{c^2}{a^2} (\tfrac{1}{4} a^2 - w^2) : \frac{(\frac{1}{4} a^2 - w^2)^2}{w^2}$$

$$= y^2 : \frac{a^2}{c^2} (\tfrac{1}{4} c^2 - y^2), \text{ oder}$$

$$1 : \frac{\frac{1}{4} a^2 - w^2}{w^2} = y^2 : \tfrac{1}{4} c^2 - y^2, \text{ mithin}$$

$$y^2 (1 + \frac{\frac{1}{4} a^2 - w^2}{w^2}) = (\frac{w^2 + \frac{1}{4} a^2 - w^2}{w^2}) y^2$$

$$= \frac{a^2}{4w^2} y^2 = \tfrac{1}{4} c^2, \text{ also}$$

$$w^2 = \frac{a^2 y^2}{c^2},\ w = \frac{a y}{c},\ \text{folglich}$$

7. $$wy = \frac{ay^2}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{c^2}{a^2} \left(\tfrac{1}{4} a^2 - u^2\right)$$

$$= \frac{c}{a} \left(\tfrac{1}{4} a^2 - u^2\right)$$

$$= \frac{ac}{4} - \frac{cu^2}{a}.$$

8. Nun ziehe man noch die geraden Linien MH, MK, so ist

9. $\triangle MKP = \frac{1}{2} MP\ (CP + CK) = \frac{1}{2} uy + \frac{1}{2} wy$

$\triangle MCP = \frac{1}{2} MP.\ CP = \frac{1}{2} uy$

$\triangle MHK = \frac{1}{2} HK\ (CP + CK) = \frac{1}{2} uZ + \frac{1}{2} wZ$

$\triangle HCK = \frac{1}{2} HK\ \ CK = \frac{1}{2} wZ$; mithin

10. $\triangle MCH = \triangle MKP + \triangle HMK - \triangle MCP - \triangle HCK$

$$= \tfrac{1}{2} wy + \tfrac{1}{2} uZ$$

$$= \tfrac{1}{2}.\ \frac{ac}{4} - \tfrac{1}{2}.\ \frac{cu^2}{a} + \tfrac{1}{2}.\ \frac{cu^2}{a} \text{ (Nr. 3 und 7)}$$

$$= \tfrac{1}{8} ac.$$

11. Ferner ist $\triangle MCH = \frac{1}{2} CM.\ CH \sin. q$ (§. 34)

$= \frac{1}{8} mn \sin. q.$, folglich

12. $\frac{1}{8} mn \sin. q = \frac{1}{8} ac$, und also auch

$mn \sin. q = a c.$

§. 299.

Aufgabe:

Aus zweyen conjugirten Diametern m, n nebst ihrem eingeschlossenen Winkel q, die beyden Axen a, c der Ellipse zu suchen.

Auf-

Auflösung:

1. $a^2 + c^2 = m^2 + n^2$ (§. 297.)
$ac = mn \sin. q$ (§. 298.) mithin

2. $a^2 + 2ac + c^2 = m^2 + 2mn \sin. q + n^2$, und
$a^2 - 2ac + c^2 = m^2 - 2mn \sin. q + n^2$,
mithin

3. $a + c = \sqrt{(m^2 + 2mn \sin. q + n^2)}$, und
$a - c = \sqrt{(m^2 - 2mn \sin. q. + n^2)}$, folglich aus §. 86 Arithm.

4. $a = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + 2mn \sin. q + n^2)}$
$+ \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 2mn \sin. q + n^2)}$, und
$c = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + 2mn \sin. q + n^2)} - \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 2mn \sin. q + n^2)}$.

Zusatz: Wenn von den 5 Größen, nemlich den beyden Axen a, c, den beyden conjugirten Diametern m, n und ihrem eingeschlossenen Winkel q, drey Stücke gegeben sind, so lassen sich allemal die beyden übrigen aus den beyden Gleichungen Nr. 1 bestimmen. (§. 167. III. Zus. Arithm.)

§. 300.

Aufgabe; (Fig. 85.)

Aus dem Parameter p, für die Abscisse x oder den Punct M der Ellipse ihren Krümmungshalbmesser MC zu suchen.

Auflösung:

1. Für jede krumme Linie ist:

M

$MC = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2 y}$, wenn man dx als eine unveränderliche Größe annimmt (§. 264. I. Zuſ.).

2. Für die Ellipſe iſt aber aus §. 287

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a}, \text{ alſo } y = (px - \frac{px^2}{a})^{\frac{1}{2}},$$

und

3. $dy = \frac{1}{2}(px - \frac{px^2}{a})^{-\frac{1}{2}}(pdx - \frac{2pxdx}{a})$

(§. 307. Arithm.)

$= (\frac{1}{2}p - \frac{px}{a})\,dx\,(px - \frac{px^2}{a})^{-\frac{1}{2}}$, alſo

4. $dy^2 = (\frac{1}{4}p^2 - \frac{p^2x}{a} + \frac{p^2x^2}{a^2})\,dx^2\,(px - \frac{px^2}{a})^{-1}$

$= \frac{a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2}{4a^2(px - \frac{px^2}{a})}\,dx^2$, und

5. $dx^2 + dy^2 = (1 + \frac{a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2}{4a^2(px - \frac{px^2}{a})})\,dx^2$

$= \frac{4a^2px - 4apx^2 + a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2}{4a^2(px - \frac{px^2}{a})}\,dx^2$

6. $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{(4a^2px - 4apx^2 + a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{8a^3\,(px - \frac{px^2}{a})^{\frac{3}{2}}}\,dx^3$$

7. Differentiirt man Nr. 3 nochmal nach §. 312. b. und 313 Arithm. so wird, wenn man dx als unveränderlich setzt

$$d^2y = -\frac{p}{a}\,dx^2\,(px - \frac{px^2}{a})^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}p - \frac{px}{a})(px - \frac{px^2}{a})^{-\frac{3}{2}}\,dx\,(pdx - \frac{2pxdx}{a})$$

$$= -\frac{p}{a}\,dx^2\,(px - \frac{px^2}{a})^{-\frac{1}{2}} - (\tfrac{1}{4}p^2 - \frac{p^2x}{2a} - \frac{p^2x}{2a} + \frac{p^2x^2}{a^2})\,dx^2\,(px - \frac{px^2}{a})^{-\frac{3}{2}}$$

8. Nun ist aber:

$$(px - \frac{px^2}{a})^{-\frac{1}{2}} = (px - \frac{px^2}{a})(px - \frac{px^2}{a})^{-\frac{3}{2}},$$

mithin in der vorigen Gleichung substituirt, giebt

9. $$d^2y = [-\frac{p^2x}{a} + \frac{p^2x^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}p^2 + \frac{p^2x}{a} - \frac{p^2x^2}{a^2}]\,dx^2\,(px - \frac{px^2}{a})^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\,p^2\,dx^2\,(px - \frac{px^2}{a})^{-\frac{3}{2}},$$ folglich

10. $dx d^2y = -\frac{1}{4} p^2 dx^3 \left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{-\frac{3}{2}}$; mithin endlich (Nr. 1) der Krümmungshalbmesser der Ellipse für den Punct M, oder

11. $MC =$

$$-\frac{(4a^2px - 4apx^2 + a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2)^{\frac{3}{2}} dx^3}{8a^3\left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\times -\frac{4\left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2 dx^3}$$

$$= \frac{(4a^2px - 4apx^2 + a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2}$$

Da nun letztere Gleichung keine Hilfsgröße mehr enthält, so ist sie eine vollständige Gleichung.

I. Zusatz: Am Scheitel, wo $x = o$ ist, wird

$$MC = \frac{(a^2p^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2} = \frac{a^3p^3}{2a^3p^2} = \frac{1}{2}p$$ wie bey der Parabel (§. 281. II. Zus.).

II. Zusatz: Für $x = \frac{1}{2}a$ ist

$$MC = \frac{(2a^3p - a^3p + a^2p^2 - 2a^2p^2 + a^2p^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2}$$

$$= \frac{(a^3p)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2} = \frac{a^3p\sqrt{a^3p}}{2a^3p^2} = \frac{\sqrt{a^3p}}{2p}$$

$$= \frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{2}a.\frac{a}{\sqrt{ap}} = \frac{1}{2}a.\frac{a}{c}$$ (§. 290 I Zus.) mithin ist für $= \frac{1}{2}a$, $MC : \frac{1}{2}a = a : c$.

III. Zusatz: Vermög Nr. 5 ist:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4a^2px - 4apx^2 + a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2}{8a^3\left(px - \frac{px^2}{a}\right)}$$

also (Fig. 93) die Länge des elliptischen Bogens AM nach §. 267.

$$= \int \left(\frac{4a^2px - 4apx^2 + a^2p^2 - 4ap^2x + p^2x^2)^{\frac{1}{2}}}{8a^3\left(px - \frac{px^2}{a}\right)} dx \right.$$

Wo aber die Integration durch Auflösung in eine Reihe nach §. 336 Arithm. geschehen muß.

§. 301.

Aufgabe: (Fig. 93)

Das zwischen den rechtwinklichten Coordinaten AP, PM und dem Bogen AM enthaltene Stück AMP der Ellipse zu quadriren.

Auflösung:

1. Allgemein ist die von rechtwinklichten Coordinaten und einem Bogen begränzte Ebene oder $R = \int ydx$ (§. 268).

2. Nun ist für die Ellipse:

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a} \text{ (§. 287.)} = \frac{apx - px^2}{a}$$

$$= \frac{p}{a}(ax - x^2)$$

y

$y = p^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$, folglich

3. $ydx = p^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} dx (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$, und folglich

4. $AMP = \int p^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} dx (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

5. Dieses Integral läßt sich nun aus den Integralformeln der VI. Tabelle Nr. 28 §. 252. bestimmen; Denn wenn man in dieser Tabelle $b = p^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}}$; und $c = a$ setzt, so wird

6. $\int p^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} dx (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{8} p^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} a^2 . \text{arc. cos.} (1 - \frac{2x}{a})$

$- \frac{1}{8} p^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} (2a - 4x) \sqrt{(ax - x^2)} + C.$

$= \frac{1}{8} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} . \text{arc. cos.} (1 - \frac{2x}{a})$

$- \frac{1}{8} p^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} (2a - 4x) \sqrt{(ax - x^2)} + C$

7. Für $x = 0$ wird nun auch die Fläche $AMP = 0$;
mithin $0 = \frac{1}{8} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} \text{arc. cos. } 1 + C$; nun gehört aber zum Cosinus 1, das ist, zu einem Cosinus, welcher dem positiven Halbmesser 1 gleich ist, ein Bogen $= 0$ (§. 296 III. Zus.) Trig.) oder arc. cos. $1 = 0$; folglich ist auch $C = 0$, mithin

8. $APM = \frac{1}{8} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} \text{arc. cos.} (1 - \frac{2x}{a})$

$- \frac{1}{8} p^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} (2a - 4x) \sqrt{(ax - x^2)}$

I. Zusatz: Setzt man die halbe Peripherie des Kreises für den Radius $1 = \pi$ (§. 127. Geom.), so ist für $x = a$ die halbe Ellipse $ADB = \frac{1}{8} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$ arc. cos. -1.

Nun ist aber arc. cos. $-1 = \pi$ (§. 296. III. und IV. Zus. Trig.) mithin

$ADB = \frac{1}{8} a \sqrt{ap} \times \pi = \frac{1}{8} ac\,\pi$ (§. 290. I. Zus.).

II. Zusatz. Die Quadratur der Ellipse hängt von jener des Kreises ab.

§. 302.

Aufgabe: (Fig. 93.)

Die Oberfläche des elliptischen Sphäroids, welches der unbestimmte Bogen DM der Ellipse durch Umdrehung um die große Axe beschreibt, zu bestimmen.

Auflösung:

1. Wenn man die Abscissen auf der großen Axe vom Mittelpuncte C aus bestimmt, so ist $u = \frac{1}{2} a - x$; mithin $du = -dx$, und $du^2 = dx^2$

2. Die Oberfläche jedes Sphäroids einer krummen Linie, oder

$$Q = \int 2\pi y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (§. 270. II.)},$$
$$= \int 2\pi y (du^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (Nr. 1.)}$$

3. Nun ist für die Ellipse aus §. 290. V. Zuf.

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2\right);\ \text{mithin}$$

4. $$y = \frac{c}{a}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \text{und}$$

5. $$dy = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{c}{a}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2\,udu)$$

$$= -\frac{cudu}{a\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2\right)}},\ \text{also}$$

$$dy^2 = \frac{c^2u^2du^2}{a^2\left(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2\right)},\ \text{und}$$

$$du^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{c^2u^2}{a^2\left(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2\right)}\right)du^2$$

$$= \frac{\tfrac{1}{4}a^4 - a^2u^2 + c^2u^2}{a^2\left(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2\right)}du^2$$

mithin

6. $$2\pi y\left(du^2 + dy^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi c}{a}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \frac{\left(a^4 - 4a^2u^2 + 4c^2u^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2a\left(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2\right)^{\frac{1}{2}}}du,\ \text{oder}$$

$$dQ = \frac{c\pi du}{a^2}\left(a^4 - 4\left(a^2 - c^2\right)u^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

7. Nun ist $e = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(a^2 - c^2\right)}$ (§. 290, VI.. Zuf.)
mithin
$e^2 = \tfrac{1}{4}\left(a^2 - c^2\right)$, und $16\,e^2 = 4\left(a^2 - c^2\right)$.
folglich ſubſtituirt,

8.

8. $Q = \int \frac{c\pi du}{a^2} (a^4 - 16 e^2 u^2)^{\frac{1}{2}} + C$

$= \int \frac{4 ce\pi du}{a^2} (\frac{a^4}{16 e^2} - u^2)^{\frac{1}{2}} + C$

9. Dieses Differential läßt sich nun vermög der VI. Tabelle Nr. 26. §. 252. integriren, es wird nemlich

10. $Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{16 e^2} \cdot \frac{4 ce\pi}{a^2} \cdot$ arc. sin. $\frac{u \cdot 4e}{a^2}$

$+ \frac{2 ce\pi u}{a^2} \sqrt{(\frac{a^4}{16 e^2} - u^2)} + C$

$= \frac{a^2 c\pi}{8e} \cdot$ arc. sin. $\frac{4eu}{a^2}$

$+ \frac{2 ce\pi u}{a^2} \sqrt{(\frac{a^4}{16 e^2} - u^2)} + C$

11. Setzt man nun die Abscisse $u = o$, so wird die ganze Gleichung, mithin auch $C = o$, folglich für den Bogen DM

12. $Q = \frac{a^2 c\pi}{8e} \cdot$ arc. sin. $\frac{4eu}{a^2}$

$+ \frac{2 ce\pi u}{a^2} \sqrt{(\frac{a^4}{16 e^2} - u^2)}$

I. Zusatz: Für $u = \frac{1}{2} a$ wird

$Q = \frac{a^2 c\pi}{8e}$ arc. sin. $\frac{2e}{a}$

$+ \frac{ce\pi}{a} \sqrt{(\frac{a^4}{4(a^2 - c^2)} - \frac{1}{4} a^2)}$

$=$

$$= \frac{a^2 c\pi}{8e} \text{ arc. sin. } \frac{2e}{a}$$

$$+ \frac{ce\pi}{a} \sqrt{\left(\frac{a^4 - a^4 + a^2 c^2}{4(a^2 - c^2)}\right)}$$

Nun ist $4(a^2 - c^2) = 16 e^2$, mithin

$\sqrt{(4(a^2 - c^2))} = 4e$, folglich

$$Q = \frac{a^2 c\pi}{8e} \text{ arc. sin. } \frac{2e}{a} + \frac{ce\pi}{a} \cdot \frac{ac}{4e}$$

$$= \frac{a^2 c\pi}{8e} \text{ arc. sin. } \frac{2e}{a} + \tfrac{1}{4} c^2 \pi$$

welches also die Oberfläche vom halben Sphäroid der Ellipse ist, mithin

II. Zusatz: Für die ganze Ellipse, wenn sich solche um die große Axe drehet, ist die Oberfläche

$$2Q = \frac{a^2 c\pi}{4e} \text{ arc. sin. } \frac{2e}{a} + \tfrac{1}{2} c^2 \pi$$

III. Zusatz: Je kleiner nun $e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$ ist, desto kleiner ist auch $\frac{2e}{a}$, mithin desto näher kömmt der Sinus seinem Bogen, so, daß also arc. sin. $\frac{2e}{a} = \frac{2e}{a}$ eine unvollständige Gleichung ist, mithin auch

$$2Q = \frac{a^2 c\pi}{4e} \cdot \frac{2e}{a} + \tfrac{1}{2} c^2 \pi$$

$= \frac{1}{2} ac\pi + \frac{1}{2} c^2 \pi$; erst an der Gränze, wenn e unendlich klein, oder als eine verschwindende

Grö-

Größe betrachtet wird, mithin $a = c$ ist, so geht sie in nachstehende vollkommene über: $2Q = \frac{1}{2} a^2 \pi + \frac{1}{2} a^2 \pi = a^2\pi = 4r^2\pi$, wenn man $a = 2r$ setzt, oder das elliptische Sphäroid wird eine Kugel (§. 272. II. Zus. Geom.)

§. 303.

Aufgabe: (Fig. 93.)

Wenn $a = 1718{,}874$, und $c = \frac{230}{231} a$ gegeben ist, die Oberfläche des Sphäroids zu bestimmen, welches entsteht, wenn sich die halbe Ellipse um die große Axe $AB = a$ dreht.

Auflösung:

1. $2Q = \frac{a^2 c\pi}{4e}$ arc. sin. $\frac{2e}{a} + \frac{1}{2} c^2 \pi$ (§. 302. II. Zus.)

2. Nun ist $a^2 c\pi = a^2 . \frac{230}{231} a\pi = \frac{230 a^3 \pi}{231}$

Ferner ist $e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - \frac{230^2}{231^2} a^2)}$

$$= \frac{1}{2} a \sqrt{\left(\frac{231^2 - 230^2}{231^2}\right)}$$

mithin $4e = 2a \frac{\sqrt{(231^2 - 230^2)}}{231} = \frac{2a\sqrt{461}}{231}$,

also $e = \frac{a\sqrt{461}}{462}$

3.

3. $\frac{a^2 c \pi}{4e} = \frac{230 a^3 \pi}{231} \times \frac{231}{2a\sqrt{461}}$

$= \frac{230 a^2 \pi}{2\sqrt{461}} = \frac{115 a^2 \pi}{\sqrt{461}}$

4. $\frac{2e}{a} = \frac{a\sqrt{461}}{231} : a = \frac{\sqrt{461}}{231}$

5. $\frac{1}{2} c^2 \pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{230^2}{231^2} a^2 \pi$, folglich die ganze Ober-

fläche, oder:

6. $2Q = \frac{115 a^2 \pi}{\sqrt{461}}$ arc. fin. $\frac{\sqrt{461}}{231} + \frac{230^2 a^2 \pi}{2.231^2}$

7. Nun ist

log. a = 3,2352439	log. 461 = 2,6637009
2 = 2	2 = 2
log. a^2 = 6,4704878	log. $\sqrt{461}$ = 1,3318504
log. 115 = 2,0606978	
log. π = 0,4971499	
log. $115 a^2 \pi$ = 9,0283355	
log. $\sqrt{461}$. = 1,3318504	

8. log. $\frac{115 a^2 \pi}{\sqrt{461}}$ = 7,6964851.

9. $\frac{\sqrt{461}}{231} = \frac{21,4709105}{231} = 0,0929477$

10. Schlägt man diese Zahl unter den Sinuſſen für den Halbmeſſer 1 auf, ſo entſpricht ſie dem Sinus von 5° 20′ beynahe.

11. Nun ist für eben den Halbmesser 1

arc. $5^\circ = 0{,}0872665$

arc. $20' = 0{,}0058177$ also

arc. $5^\circ, 20' = 0{,}0930842$, mithin

12. log arc. sin. $\frac{\sqrt{461}}{231} = 5{,}9688759 - 7$ (§. 246. Arithm.)

log. $\frac{115\,a^2\pi}{\sqrt{461}} = 7{,}6964851$ (Nr. 8.)

$6{,}6653610$; folglich

13. $\frac{115\,a^2\pi}{\sqrt{461}}$ arc. sin. $\frac{\sqrt{461}}{231} = 4627656.$

14. Ferner Nr. 6.

log. $230 = 2{,}3617278$	log. $231 = 2{,}3636120$
log. $a = 3{,}2352439$	$2 = 2$
log. $230\,a = 5{,}5969717$	log. $231^2 = 4{,}7272240$
$2 = 2$	log. $2 = 0{,}3010300$
log. $230^2\,a^2 = 11{,}1939434$	log. $2.231^2 = 5{,}0282540$

log. $\pi = 0{,}4971499$

$11{,}6910933$

l. $2.231^2 = 5{,}0282540$

$6{,}6628393$, mithin

15. $\frac{230^2\, a^2 \pi}{2.231^2} = 4600863$

$\frac{115\, a^2 \pi}{\sqrt{461}}$ arc. sin. $\frac{\sqrt{461}}{231} = 4627656$ (Nr. 13.)

Folglich 2 Q = 9228519 (Nr. 6.)

Anmerkung: Die Bestimmungen für a und c sind aus Käſtners Anfangsgründen der Anal. des Unendl. 3. Ausg. Seite 706 genommen, wo a den Diameter des Aequators, und c die Erdaxe folglich 2 Q die Oberfläche der Erde in geographischen Meilen angiebt.

§. 304.

Aufgabe: (Fig. 93.)

Die Oberfläche des Sphäroides, welches der Bogen AM der Ellipse durch Umdrehung um die kleine Axe DE beschreibt, zu finden.

Auflösung:

1. Nimmt man DE zur Abscissenlinie, und den Mittelpunct C zu ihrem Anfangspunct, so ist

2. $u^2 = \frac{a^2}{c^2}(\frac{1}{4}c^2 - y^2)$ (§. 290. X. Zuſ.); ferner

ist nun

3. $Q = \int 2\pi u\,(du^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 270. II.) und

4. $u = \frac{a}{c}(\frac{1}{4}c^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$, ferner

5.

5. $du = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{c} \left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}} (-2ydy)$

$$= -\frac{aydy}{c\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \text{ und}$$

$$du^2 = \frac{a^2 y^2 dy^2}{c^2\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)}, \text{ mithin}$$

$$dy^2 + du^2 = \left(1 + \frac{a^2 y^2}{c^2\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)}\right) dy^2$$

$$= \frac{c^4 - 4c^2y^2 + 4a^2y^2}{4c^2\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)} dy^2, \text{ und}$$

6. $(dy^2 + du^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(c^4 + 4(a^2 - c^2)y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2c\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}} dy$

7. Setzt man nun die Werthe von Nr. 4 und 6 in die Gleichung Nr. 3, so ist für die Ellipse

8. $Q = \int \frac{2a\pi}{c} \left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\times \frac{\left(c^4 + 4(a^2 - c^2)y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2c\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}} dy + C, \text{ oder}$$

$$Q = \int \frac{a\pi}{c^2} dy \left(c^4 + 4(a^2 - c_2)y^2\right)^{\frac{1}{2}} + C$$

9. Nun ist wieder $e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$ (§. 290. VI. Zus.) mithin $16e^2 = 4(a^2 - c^2)$, dieses in vorgehender Gleichung substituirt, giebt

10. $Q = \int \frac{a\pi}{c^2} dy\ (c^4 + 16\,e^2\,y^2)^{\frac{1}{2}} + C$

$= \int \frac{4\,ae\pi}{c^2} dy \left(\frac{c^4}{16\,e^2} + y^2\right)^{\frac{1}{2}} + C$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\,ae\pi y}{c^2} \sqrt{\left(\frac{c^4}{16\,e^2} + y^2\right)}$

$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{c^4}{16\,e^2} \cdot \frac{4\,ae\pi}{c^2}$ log. nat. $\left[y + \sqrt{\left(\frac{c^4}{16\,e^2} + y^2\right)}\right] + C$ (VI. Tabelle Nr. 6. §. 252.)

$= \frac{2\,ae\pi y}{c^2} \cdot \frac{\sqrt{(c^4 + 16\,e^2\,y^2)}}{4\,e}$

$+ \frac{ac^2\pi}{8\,e}$ log. nat. $\left[y + \frac{\sqrt{(c^4 + 16\,e^2\,y^2)}}{4\,e}\right] + C$

11. Für $y = o$, ist nun auch $Q = o$, mithin

$o = \frac{ac^2\pi}{8\,e}$ log. nat. $\frac{c^2}{4\,e} + C$, also

$C = -\frac{ac^2\pi}{8\,e}$ log. nat. $\frac{c^2}{4\,e}$, folglich

12. $Q = \frac{a\pi y}{2\,c^2} \sqrt{(c^4 + 16e^2\,y^2)}$

$+ \frac{ac^2\pi}{8\,e}$ log. nat. $\left[\frac{4\,e}{c^2} \cdot \left(y + \frac{\sqrt{(c^4+16e^2y^2)}}{4\,e}\right)\right]$

13. Setzt man wieder für $16\,e^2$ dessen Werth $4\,(a^2 - c^2)$ (Nr. 9.), so ist

14. $Q = \frac{a\pi y}{2c^2} \sqrt{(c^4 + 4a^2y^2 - 4c^2y^2)}$

$$+ \frac{a c^2 \pi}{8e} \text{ log. nat. } \left[\frac{4cy}{c^2} + \frac{\sqrt{(c^4 + 4a^2y^2 - 4c^2y^2)}}{c^2}\right]$$

I. Zusatz: Für $y = \frac{1}{2}c$, wird die Oberfläche des halben elliptischen Sphäroids, welche durch das Umdrehen um die kleine Axe entsteht, oder

$$Q = \frac{ac\pi}{4c^2} \sqrt{(c^4 + a^2c^2 - c^4)}$$

$$+ \frac{ac^2\pi}{8e} \text{ log. nat. } \left[\frac{2e}{c} + \frac{\sqrt{(c^4 + a^2c^2 - c^4)}}{c^2}\right]$$

$$= \frac{a^2\pi}{4} + \frac{ac^2\pi}{8e} \text{ log. nat. } \frac{2e + a}{c}$$

II. Zusatz: Die Oberfläche des ganzen elliptischen Sphäroids, für die kleine Axe, oder

$$2Q = \tfrac{1}{2} a^2\pi + \frac{ac^2\pi}{4e} \text{ log. nat. } \frac{2e + a}{c}$$

III. Zusatz: Nimmt man c, mithin auch e als eine veränderliche Größe, so wird e um so kleiner, je weniger c von a verschieden ist, und $\frac{2e + a}{c}$

$= \frac{2e}{c} + 1$, so wie log. nat. $\frac{2e}{c} = \frac{2e}{c}$ (§. 236. I. Zus. Arithm.), folglich auch $2Q = \frac{1}{2} a^2\pi + \frac{ac^2\pi}{4e} \cdot \frac{2e}{2} = \frac{1}{2} a^2\pi + \frac{1}{2} c^2\pi$ sind un-

voll-

vollständige Gleichungen, an der Gränze von c aber, das ist, wenn die veränderliche, also Hilfsgröße c ihrer Hauptgröße a gleich, also die Ellipse zum Kreis wird, so ist für letztere $2Q = \frac{1}{2} a^2 \pi + \frac{1}{2} a^2 \pi = a^2 \pi = 4r^2 \pi$ eine vollständige Gleichung.

§. 305.

Aufgabe: (Fig. 93.)

Wenn von der Erde der Diameter des Aequators, oder $a = \frac{5400}{\pi} = 1718{,}874$ geograph. Meilen, und $c = \frac{230}{231} a$ gegeben ist, deren Oberfläche in geographischen Quadratmeilen zu bestimmen, wenn die Erde als ein elliptisches Sphäroid genommen wird, welches durch Umdrehung der Ellipse um die kleine Axe erzeugt wird.

Auflösung:

I. $2Q = \frac{1}{2} a^2 \pi + \frac{ac^2\pi}{4e} \log. nat. \frac{2e+a}{c}$ (§. 304

II. Zus.)

2. Nun ist $ac^2\pi = a \frac{230^2}{231^2} a^2\pi = \frac{230^2 a^3 \pi}{231^2}$

$4e = \frac{2a\sqrt{461}}{231}$, mithin

3. $\frac{ac^2\pi}{4e} + \frac{230^2\, a^3\pi}{231^2} \times \frac{231}{2a\sqrt{461}} = \frac{230^2\, a^2\pi}{462\sqrt{461}}$

4. $2e + a = \frac{a\sqrt{461}}{231} + a = \frac{a(231 + \sqrt{461})}{231}$,

also

5. $\frac{2e + a}{c} = \frac{a(231 + \sqrt{461})}{231} \times \frac{231}{230.\, a}$

$= \frac{231 + \sqrt{461}}{230} = \frac{231 + 21{,}4709}{230} = 1{,}0977$;

folglich

6. $2Q = \frac{1}{2}\, a^2\pi + \frac{230^2\, a^2\pi}{462\sqrt{461}}$ log. nat. 1,0977

7. Nun ist log. $a = 3{,}2352439$

$2 = 2$

log, $a^2 = 6{,}4704878$

log. $\pi = 0{,}4971499$

c. d. log. $2 = 9{,}6989700 - 10$

$6{,}6666077$, folglich

8. $\frac{1}{2}\, a^2\pi = 4640960$

9. Nun bestimme man, im Falle man Tabellen für die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen an der Hand hat, log. nat. 1,0977 auf die nemliche Art wie §. 244. Arithm.; es ist nemlich aus Wolframs Tabellen:

log. nat. $1098 = 7{,}0012456$

log. nat. $1097 = 7{,}0003345$

9111, mithin

10 : 7 = 9111 : x. und x = 6378, alſo
log. nat. 1097,7 = 7,0009723,
Ferner log. nat. 1000 = 6,9077553, folglich

log. nat. $\frac{1097,7}{1000}$ = 0,0932170 = log. nat. 1,0977

10. Wenn man keine Tabellen von natürlichen Logarithmen beſitzt, ſo verwandelt man die gemeinen in natürliche (§. 241, Arithm.). Es iſt nemlich:

log. nat. 1,0977 = 2,3025850 log. vulg. 1,0977
= 2,3025850 × 0,0404837
= 0,0932172

11. Ferner log. 230 = 2,3617278 | log. 461 = 2,6637009
log. a = 3,2352439 | 2 = 2

log. 230. a. = 5,5969717 | log. $\sqrt{461}$
2 = 2 | = 1,3318504

log. $230^2 a^2$ = 11,1939434
log. π = 0,4971499
log. 0,093217 = 4,9694951 — 6
c. d. log. 462 = 7,3353580 — 10
c. d. log. $\sqrt{461}$ = 8,6681496 — 10

6,664c960, alſo Nr. 6.

12. $\frac{230^2 a^2 \pi}{462\sqrt{461}}$ log. nat. 1,0977 = 4614195

$\frac{1}{2} a^2 \pi$ = 4640960 (Nr. 8.)

Folglich Nr. 6. 2 Q = 9255155 □ Meilen.

§. 306.

Aufgabe: (Fig. 93.)

Den Theil K des elliptischen Sphäroids zu cubiren, welchen die Fläche CPMD beschreibt, wenn sie sich um die große Axe AB dreht.

Auflösung:

1. Für die Abscissen vom Mittelpuncte an gerechnet, wird allgemein $K = \int \pi y^2 \, du$ (§. 270. I.)

2. Ferner ist $y^2 = \frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2}$, mithin

$$\pi y^2 \, du = (\tfrac{1}{4} c^2 \, du - \frac{c^2 u^2 \, du}{a^2}) \, \pi$$ folglich für die Ellipse

3. $$K = (\tfrac{1}{4} c^2 u - \frac{c^2 u^3}{3 a^2}) \, \pi$$

4. Da nun für $u = 0$, die ganze vorhergehende Gleichung $= 0$ wird, so darf keine beständige Größe beygesetzt werden.

I. Zusatz: Für $u = \frac{1}{2} a$, wird das halbe elliptische Sphäroid.

$$K = \tfrac{1}{8} \pi c^2 a - \frac{c^2 a^3}{24 a^2} \pi = \tfrac{1}{8} a c^2 \pi \, (1 - \tfrac{1}{3})$$

$$= \tfrac{1}{12} a c^2 \pi \text{ ; mithin das Ganze, oder}$$

$$2 K = \tfrac{1}{6} a c^2 \pi.$$

II. Zusatz: Wird $c = a$, also das Sphäroid zur Kugel, so ist $2 K = \frac{1}{6} a^3 \pi$, oder wenn man

$a = d = 2r$ setzt, $2K = \frac{1}{6} d^3 \pi = \frac{4}{3} r^3 \pi$ (§. 273. Geom.)

III. Zusatz: Will man das Stück des elliptischen Sphäroids bestimmen, welches die Fläche AMmC beschreibt, wenn sie sich um die kleine Axe DE dreht, so ist nun

$K = \int \pi u^2 dy$ (§. 270 I.); und $u^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 y^2}{c^2}$ (§. 290. X. Zus.), mithin

$\pi u^2 dy = \pi (\frac{1}{4} a^2 dy - \frac{a^2 y^2}{c^2} dy)$, folglich

$K = \frac{1}{4} a^2 y\pi - \frac{a^2 y^3 \pi}{3 c^2}$; wo wieder $C = 0$ ist

IV. Zusatz: Setzt man im vorhergehenden Zusatz $y = \frac{1}{2} c$, so ist das halbe elliptische Sphäroid für die kleine Axe

$K = \frac{1}{8} a^2 c\pi - \frac{a^2 c^3 \pi}{24 c^2} = \frac{1}{8} a^2 c\pi (1 - \frac{1}{3})$

$= \frac{1}{12} a^2 c\pi$, folglich das ganze Sphäroid für die kleine Axe, oder

$2K = \frac{1}{6} a^2 c\pi$.

Setzt man endlich $c = a = d = 2r$, so ist die Kugel

$2K = \frac{1}{6} a^3 \pi = \frac{1}{6} d^3 \pi = \frac{4}{3} r^3 \pi$ wie II. Zus.

V Zusatz: Wenn man das Sphäroid im I. Zus. $= s$, und folglich jenes vom IV. Zus. $= S$, so ist $S : s = \frac{a^2 c \pi}{6} : \frac{ac^2 \pi}{6} = a : c$

VI.

VI. Zusatz: Da $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, so ist auch;

$$K = \int(\pi\, y^2\, dx) = \int \pi\, (pxdx - \frac{px^2dx}{a})$$

$$= \pi\, (\tfrac{1}{2}\, px^2 - \frac{px^3}{3a}) = \pi\, (\frac{3apx^2 - 2px^3}{6a})$$

$= \frac{\pi px^2}{6a}\,(3a - 2x)$, wenn sich die Fläche AMP um die große Axe dreht.

IV. Abschnitt.

Von der Hyperbel.

§. 307.

Lehrsatz: (Fig. 88.)

Wenn man AB = a (§. 272. III. Zus.) zur Abscissenlinie, und A zum Anfangspunct der Abscissen nimmt, ferner den Parameter = p, und die einem beliebigen Punct M der Hyperbel entsprechenden Coordinaten x, y setzt, so ist für die Hyperbel allgemein:

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

Beweis:

1. Man lege durch M eine Ebene zur Grundfläche des Kegels parallel, so ist wieder alles wie §. 274. Nr. 1 — 5, also

2.

2. $PM^2 = RP.\ PN.$

3. Durch A ziehe man im Axentriangel des untern Kegels, und eben so durch B im Axentriangel des obern Kegels zu NR die Parallelen AG. BL, so ist

4. $\triangle APN \backsim \triangle ABL$, mithin
$AB : BL = AP : PN$, folglich

5. $$PN = \frac{BL.\ AP}{AB}$$

6. Ferner $\triangle ABG \backsim \triangle PBR$, mithin
$AB : AG = BP : RP$, folglich

7. $$RP = \frac{AG.\ BP}{AB}.$$

8. Setzt man nun die Werthe Nr. 5 und 7. in die Gleichung Nr. 2, so ist

9. $$PM^2 = \frac{AG.\ BP}{AB} \cdot \frac{BL.\ AP}{AB}$$
$$= \frac{AG.\ BL}{AB} \cdot \frac{AP.\ BP}{AB}$$

10. Man mag nun den Punct M in der Hyperbel, wo man will, annehmen, so bleibt $\frac{AG.\ BL}{AB}$ unveränderlich, und ist also der Parameter p;

11. Ferner ist $BP = AB + AP = a + x$; folglich diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung substituirt, giebt

12.

12. $y^2 = p \cdot \frac{x(a+x)}{a} = \frac{apx}{a} + \frac{px^2}{a}$

$= px + \frac{px^2}{a}$

Zusatz: Da bey diesem Kegelschnitte das Quadrat der Ordinate größer als das Rechteck aus der Abscisse und dem Parameter ist, so erhielt dieses Ueberschusses wegen (ὑπερβολή) solcher den Namen Hyperbel.

§. 308.

Lehrsatz: (Fig. 88)

Wenn man den Winkel EDH $= \alpha$, und bAH $=$ BAL $= \beta$, ferner wieder AB $=$ a setzt, so ist für jede Hyperbel ihr Parameter

$$p = \frac{2a \sin. \beta (\sin. \alpha \cos. \beta - \cos. \alpha \sin. \beta)}{1 + \cos. \alpha}$$

Beweis:

1. Im Dreyecke BAL ist

AB : BL $=$ sin. ALB : sin. BAL.

2. Nun ist der Winkel ALB $=$ DAG $=$ 90° $-$ ADC $=$ 90° $- \frac{1}{2}\alpha$; mithin sin. ALB $=$ cos. $\frac{1}{2}\alpha$, und also

3. a : BL $=$ cos. $\frac{1}{2}\alpha$: sin. β, folglich

$$BL = \frac{a \sin. \beta}{\cos. \frac{1}{2}\alpha}.$$

4.

4. Eben so ist im $\triangle ABG$

$$AB : AG = \text{sin. } AGB : \text{sin. } ABG$$

5. Nun ist $AGB = 90° - GDC = 90° - \frac{1}{2}\alpha$,

also $\text{sin. } AGB = \text{cos. } \frac{1}{2}\alpha$.

6. Ferner $ABG = ABD = 180° - BDA - BAD$

$= 180° - (180° - \alpha) - \beta = \alpha - \beta$, also

$\text{sin. } ABG = \text{sin. } (\alpha - \beta) = \text{sin. } \alpha \text{ cos. } \beta$

$- \text{cos } \alpha \text{ sin. } \beta$ (§. 307. I. Zus. Trig.) und diese Werthe Nr. 4. substituirt, giebt

7. $a : AG = \text{cos. } \frac{1}{2}\alpha : \text{sin. } \alpha \text{ cos. } \beta - \text{cos. } \alpha \text{ sin. } \beta$,

und

$$AG = \frac{a\,(\text{sin. } \alpha \text{ cos. } \beta - \text{cos. } \alpha \text{ sin. } \beta)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\alpha}$$

8. Nun ist für die Hyperbel $p = \frac{AG \cdot BL}{AB}$ (§. 307. Nr. 10.) mithin aus Nr. 3 und 7 die Werthe gesetzt

$$9.\ p = \frac{a^2 \text{ sin. } \beta\,(\text{sin. } \alpha \text{ cos. } \beta - \text{cos. } \alpha \text{ sin. } \beta)}{a \text{ cos. } \frac{1}{2}\alpha^2}$$

$$= \frac{2a \text{ sin. } \beta\,(\text{sin. } \alpha \text{ cos. } \beta - \text{cos. } \alpha \text{ sin. } \beta)}{1 + \text{cos. } \alpha}$$

(§. 308. IV. Zus. Nr. 2 Trig.)

I. Zusatz: Eine Linie, in welcher für jeden Punct M allemal $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$, ist eine Hyperbel;

denn

denn die beständigen Größen p, und a mögen jeden beliebigen Werth haben, so läßt sich aus der Gleichung des Lehrsatzes für einen gleichseitigen Kegel, dessen Winkel α = EDH entweder gegeben, oder beliebig angenommen ist, allemal der Winkel β = bAH, also die Lage der Linie Ab so bestimmen, daß der Schnitt eine Hyperbel ist, und von welcher die Gleichung gilt.

II. Zusatz: Da $y = \pm \sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}$ so theilt die Abscissenlinie Ab alle Sehnen der Hyperbel, die auf ihr senkrecht stehen, in 2 gleiche Theile, und ist also eine Axe derselben.

III. Zusatz: Für $x = o$, ist auch $y = o$, mithin ist A ein Scheitelpunct der Hyperbel; eben so ist für $x = -a$, $y = \pm \sqrt{(-ap + \frac{a^2p}{a})} = o$;

mithin B ebenfalls ein Scheitelpunct

IV. Zusatz: So lange x eine positive Größe ist, so giebt es für jede Abscisse zwey einander entgegengesetzte gleiche Ordinaten, die mit ihr bis in's Unendliche wachsen.

V. Zusatz: Wenn x negativ ist, mithin die Abscissen auf der Axe nach der entgegengesetzten Richtung AB genommen werden, und $-x < a$: so ist $y^2 = -px + \frac{px^2}{a}$ eine negative, folglich

$y = \pm \sqrt{(-px + \frac{px^2}{a})}$ eine unmögliche Größe (§. 100. III. Zus. Arith.); das heißt, zwischen A und B giebt es keine Ordinaten.

VI. Zusatz: Wenn aber $-x > a$, so ist $y^2 = -px + \frac{px^2}{a}$ wieder eine positive Größe, mithin fangen bey B wieder Ordinaten an, und der Schnitt giebt im obern umgekehrten Kegel ebenfalls eine Hyperbel.

VII. Zusatz: Wenn man in der Gleichung für die Ellipse §. 287. die Größe a negativ setzt, so verwandelt sie sich in jene der Hyperbel.

§. 309.

Erklärungen: (Fig. 98.)

a) Der zwischen den beyden Scheiteln enthaltene Theil AB der Axe, heißt die große, oder Zwergaxe der Hyperbel, und wird immer wie bey der Ellipse mit a bezeichnet.

b) Der Mittelpunct C dieser großen Axe heißt zugleich der Mittelpunct der Hyperbel.

I. Zusatz: Die Hyperbel kann man sich als eine Ellipse, deren große Axe negativ ist, vorstellen (§. 308. VII. Zus.).

II. Zusatz: Nimmt man die Abscissen auf der Zwergaxe von ihrem Mittelpuncte C an, so ist für den

Punct

Punct M; $y^2 = \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap$; denn $u = CP$ $= \frac{1}{2}a + x$, mithin $x = u - \frac{1}{2}a$; $x^2 = u^2 - au + \frac{1}{4}a^2$, folglich

$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ (§. 307.) $= pu - \frac{1}{2}ap + \frac{pu^2}{a} - pu + \frac{1}{4}ap = \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap$, welches man auch erhält, wenn man §. 289. die große Axe a der Ellipse negativ setzt.

III. Zusatz: Da sowohl für positive als negative Abscissen vom Mittelpuncte aus, wenn sie nur größer als die halbe große Axe sind, oder für $u > \frac{1}{2}a$, allemal $y^2 = \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap$ positiv, mithin $y = \pm\sqrt{(\frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap)}$ eine mögliche Größe ist, so entsprechen jeder solchen positiven Abscisse CP, zwey einander gleiche und entgegengesetzte Ordinaten PM, PM′, und eben so der negativen Abscisse Cp, die einander gleichen Ordinaten pm, pm′, und wenn $CP = Cp$, so ist allemal auch $PM = pm$; folglich hat die Hyperbel im untern Kegel sowohl, als im obern Kegel 2, mithin zusammen 4 Schenkel, die einander gleich sind.

IV.

IV. Zusatz: Für $y = \frac{1}{2} p$, oder $y^2 = \frac{1}{4} p^2$ wird (II. Zus.) $\frac{1}{4} p^2 = \frac{ru^2}{a} - \frac{1}{4} ap$, oder $\frac{1}{4} p = \frac{u^2}{a} - \frac{1}{4} a$; mithin $\frac{u^2}{a} = \frac{1}{4} a + \frac{1}{4} p$; und $u^2 = \frac{1}{4}(a^2 + ap)$, folglich $u = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + ap)}$, das heißt auf beyden Seiten des Mittelpunctes giebt es auf der Zwergaxe in der Entfernung von $\frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + ap)}$ Puncte F, f, wo die Ordinate dem halben Parameter gleich ist, folglich hat die Hyperbel 2 Brennpuncte F, f (§. 273.) deren Entfernung vom Mittelpuncte, oder $e = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + ap)}$ ist

V. Zusatz: Für $u = o$, wird $y^2 = -\frac{1}{4} ap$, mithin $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-ap}$ eine unmögliche Größe.

§. 310.

Erklärungen: (Fig. 98.)

a) Wenn man durch den Mittelpunct C der Zwergaxe die Perpendikel $CD = CE = \frac{1}{2} \sqrt{ap}$ errichtet, so heißt $DE = \sqrt{ap} = c$ wie §. 290 II. Zus. die kleine Axe der Hyperbel, obgleich im Mittelpuncte der großen Axe keine Ordinate möglich ist (§. 309. V. Zus.).

b) Wenn die kleinere Axe der Zwergaxe gleich ist, so heißt die Hyperbel gleichseitig.

I. Zusatz: Für die Abscissen vom Scheitel an gerechnet ist in der Hyperbel $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)$:

Denn

$c^2 = ap$ (Erkl.); also $p = \frac{c^2}{a}$, folglich

$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ (§. 307.) $= \frac{c^2}{a}(x + \frac{x^2}{a})$

$= \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)$

II. Zusatz: Für die Abscissen vom Mittelpuncte an, wird

$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - \frac{1}{4}a^2)$; Denn

$y^2 = \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap$ (§. 309. II. Zus.)

$= \frac{c^2}{a}(\frac{u^2}{a} - \frac{1}{4}a)$ (I. Zus.) $= \frac{c^2}{a^2}(u^2 - \frac{1}{4}a^2)$

III. Zusatz: Die Entfernung eines jeden der beyden Brennpuncte F, f, oder

$e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + ap)}$ (§. 309 IV. Zus.)

$= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + c^2)}$ (Erkl.)

IV. Zusatz: Eben diese 3 vorhergehenden Gleichungen folgen aus §. 290, wenn man a negativ, und statt der kleinen Axe c die unmögliche Größe $c\sqrt{-1}$ setzt, denn $c\sqrt{-1} = \sqrt{-ap}$; mithin $-c^2 = -ap$, oder die Hyperbel ist eine Ellipse, deren kleine Axe eine unmögliche Größe ist.

V. Zusatz: Wenn man vom Scheitel A nach den Endespuncten D, oder E die gerade Linie AD, oder AE zieht, so ist $AD = AE = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + c^2)} = e$ (III. Zus.).

VI. Zusatz: Wenn man also auf der großen Axe $CF = Cf = AE$ nimmt, so sind F, und f die beyden Brennpuncte der Hyperbel.

VII. Zusatz: Eine Linie, von welcher für rechtwinklichte Coordinaten eine von den nachstehenden 4 Gleichungen paßt, ist eine Hyperbel.

1. $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ (§. 308. I. Zus.)

2. $y^2 = \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap$ (§. 309. II. Zus.)

3. $y^2 = \frac{c^2x}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)$ (I. Zus.)

4. $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - \frac{1}{4}a^2)$ (II. Zus.)

Denn so wie die letztern 3 Gleichungen aus der ersten abgeleitet sind, so folgt auch umgekehrt aus jeder dieser letztern die erste, mithin ist in jedem dieser Fälle die Linie eine Hyperbel (§. 308. I. Zus.).

VIII. Zusatz: In der gleichseitigen Hyperbel ist der Parameter jeder der beyden Axen gleich; denn $c = a = \sqrt{ap}$, mithin $c^2 = a^2 = ap$, und $p = a = c$.

IX.

IX. Zusatz: In der gleichseitigen Hyperbel ist also
$y^2 = ax + x^2 = u^2 - \frac{1}{4} a^2$ (VII. Zus.)

X. Zusatz: Nimmt man bey der Hyperbel überhaupt auf der kleinen Axe die Abscissen vom Mittelpuncte aus, so ist für den Punct M′ die Abscisse CG $=$ PM′ $=$ y, die Ordinate GM′ $=$ CP $=$ u, da nun $y^2 = \frac{c^2}{a^2} (u^2 - \frac{1}{4} a^2)$ (II. Zus.), so ist

$$u^2 = \frac{a^2}{c^2} (y^2 + \tfrac{1}{4} c^2)$$

§. 311.

Lehrsatz: (Fig. 98.)

Wenn man für einen beliebigen Punct M der Hyperbel aus den beyden Brennpuncten f, F die Radios Vectores fM, FM zieht, so ist ihr Unterschied der Zwergaxe a gleich, oder: fM — FM $=$ a

Beweis:

1. Man ziehe die senkrechte Ordinate PM, und nehme die Abscisse vom Mittelpunct C aus, so ist

2. $PM^2 = y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$ (§. 310. II. Zus.),

und

3. $FP = CP - CF = u - e = u - \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + c^2)}$ (§. 310. III. Zus.) mithin

4. $FP^2 = u^2 - u \sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} c^2$;

folglich

5.

5. $FM^2 = PM^2 + FP^2$

$= \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2 + u^2 - u\sqrt{(a^2 + c^2)}$

$+ \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$

$= \frac{a^2+c^2}{a^2}u^2 - u\sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{1}{4}a^2$, und

6. $FM = \pm(\frac{u}{a}\sqrt{(a^2 + c^2)} - \frac{1}{2}a)$ (§. 100.

1. Zuf. und 121. Arithm.)

7. Nun ist für den kleinsten Werth von $u = \frac{1}{2}a$, doch $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + c^2)}$ allemal grösser als $\frac{1}{2}a$, mithin um so mehr, wenn $u > \frac{1}{2}a$, so ist allemal $\frac{u}{a}\sqrt{(a^2 + c^2)} - \frac{1}{2}a$ eine positive, so wie $\frac{1}{2}a - \frac{u}{a}\sqrt{(a^2 + c^2)}$ eine negative Grösse, folglich bestimmt das obere Zeichen den Werth der positiven Grösse FM, oder

8. $FM = \frac{u}{a}\sqrt{(a^2 + c^2)} - \frac{1}{2}a$.

9. Ferner $fP = PC + Cf = u + e = u + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + c^2)}$, also

10. $fP^2 = u^2 + u\sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$, folglich

11. $fM^2 = PM^2 + fP^2$

$= \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2 + u^2 + u\sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{1}{4}a^2$

$+ \frac{1}{4}c^2$ (Nr. 2 und 10.)

$$= \frac{a^2 + c^2}{a^2} u^2 + u \sqrt{(a^2 + c^2)} + \tfrac{1}{4} a^2,$$

mithin

12. $fM = \pm \left(\frac{u}{a} \sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{1}{2} a\right)$, wo aber wieder das obere Zeichen den Werth der positiven Größe fM bestimmt; folglich

13. $fM - FM = \frac{u}{a} \sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{1}{2} a$

$- \frac{u}{a} \sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{1}{2} a$ (Nr. 8. und 12.) $= a$

§. 312.

Lehrsatz: (Fig. 98.)

Wenn zwey krumme Linien MAM′, mBm′ von einer geraden pN in A, und B durchschnitten werden, und wenn es auf letzterer zwey solche Puncte f, F giebt, daß für jeden Punct M einer dieser krummen Linien allemal $fM - FM = AB = a$ ist, so sind sie entgegengesetzte Hyperbeln, a ist ihre große Axe, und f, F die Brennpuncte derselben.

Beweis:

1. $fM - FM = a$ (per hyp.)

2. Nun setze man ferner $fM + FM = d$, so ist

3. $fM = \frac{1}{2} d + \frac{1}{2} a$ und

$FM = \frac{1}{2} d - \frac{1}{2} a$ (§. 86. Arithm.); mithin

4. $fM^2 = \frac{1}{4} d^2 + \frac{1}{2} ad + \frac{1}{4} a^2$, und

5.

5. $FM^2 = \frac{1}{4} d^2 - \frac{1}{2} ad + \frac{1}{4} a^2$ also

6. $fM^2 - FM^2 = ad.$

7. Nun theile man fF bey C in zwey gleiche Theile, und setze $CF = Cf = e$

8. Setzt man ferner $e = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + ap)}$, so ist $e^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} ap$, wo die beständige Größe oder der Parameter vollkommen bestimmt ist.

9. Zieht man noch die rechtwinklichte Ordinate PM, so ist für die Abscissen $CP = u$ vom Mittelpunct an gerechnet,

10. $fP = CP + Cf = u + e$, mithin
$fP^2 = u^2 + 2eu + e^2$;

11. Eben so ist $FP = CP - CF = u - e$, also
$FP^2 = u^2 - 2eu + e^2$; folglich

12. $fM^2 = PM^2 + fP^2 = y^2 + u^2 + 2eu + e^2$, und

13. $FM^2 = PM^2 + FP^2 = y^2 + u^2 - 2eu + e^2$, mithin

14. $fM^2 - FM^2 = 4eu = ad$ (Nr. 6), also

15. $d = \frac{4eu}{a}$; und $d^2 = \frac{16e^2u^2}{a^2}$

16. Setzt man diese Werthe in die Gleichung Nr. 4. und verbindet sie mit Nr. 12., so ist

17. $y^2 + u^2 + 2eu + e^2 = \frac{4e^2u^2}{a^2} + 2eu$
$+ \frac{1}{4} a^2$, oder

$$y^2 = \frac{4e^2u^2}{a^2} - u^2 - e^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$

18. Substituirt man endlich in letzterer Gleichung die Werthe aus Nr. 8, so wird

19. $y^2 = u^2 + \frac{pu^2}{a} - u^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}a^2$

$= \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap$, folglich ist

20. Jede der beyden krummen Linien eine Hyperbel, (§. 310. VII. Zus.) und da $y = \pm(\frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap)$ so theilet die Abscissenlinie pN alle senkrechte Sehnen in zwey gleiche Theile, ist also eine Axe (§. 255.) und AB die große oder Zwergaxe (§. 309.), so wie F, f die Brennpuncte sind (§. 310. III. Zus.)

§. 313.

Aufgabe:

Eine Hyperbel zu verzeichnen.

1. Auflösung: (Fig. 99.)

1. Man nehme auf einer geraden Linie die beliebige Länge AB, und trage solche ebenfalls auf einer daneben verzeichneten Linie AG auf.

2. Ferner nehme man auf ersterer Linie AF = Ef ebenfalls von beliebiger Größe.

3. Nun beschreibe man mit A1, A2, A3, A4, A5, u. s. w. deren jede größer als Af ist aus F sowohl, als f Kreise;

4. Eben so beschreibe man nun aus eben den beyden Puncten f, F mit B1, B2, B3, B4, B5 der Linie AG Kreise.

5. Die Kreise aus F mit den Radien A1, und aus f mit B1 schneiden einander in 2 Puucten, die auf verschiedenen Seiten der Centrallinie Ff liegen (§. 21. Geometr.); und eben so die Kreise, die aus f mit dem Radius A1, und aus F mit B1 beschrieben werden, und so jedes zusammengehörige Paar der übrigen Kreise.

6. Zieht man nun an einem dieser Durchschnittspuncte z. B. 4 bey A die geraden Linien f4, F4, so ist f4 — F4 = AB (Nr. 3. und 4), folglich jeder solcher Durchschnittspunct ein Punct einer Hyperbel (§. 312).

7. Verbindet man endlich alle diese Durchschnittspuncte der Ordnung nach bey A sowohl als B mit freyer Hand, durch eine Linie, so kömmt solche einer Hyperbel um so näher, je mehr man solche Durchschnittspuncte von ihr bestimmt hat.

II. Auflösung: (Fig. 100.)

8. Man ziehe die unbestimmte gerade Linie fO, und bestimme auf ihr nach Belieben einen andern Punct F.

9.

9. Ferner nehme man $fB = FA$, und setze $AB = a$.

10. An f lege man längst fO ein Lineal fD, und

11. befestige das eine End einer Schnur von der Länge $fD - AB = fD - a$ im Puncte F der Linie FO, und das andere End in D am Lineal.

12. Nun halte man mit einem Bleystifte diese Schnur immer gespannt am Lineal, während man letzteres um den Punct f dreht, so verzeichnet der Bleystift die verlangte Hyperbel; denn

13. Für jeden Punct M dieser Linie ist allemal
$fM = fD - MD$.
$FM = (fD - a) - MD$ (Nr. 11.), folglich
$fM - FM = a$; und die verzeichnete Linie ist eine Hyperbel (§. 312.).

§. 314.

Lehrsatz: (Fig. 98.)

Für den Punct M der Hyperbel ist die Subtangens, oder

$$PT = \frac{2ax + 2x^2}{a + 2x} = \frac{4u^2 - a^2}{4u}.$$

Beweis:

1. Man kann sich die Hyperbel als eine Ellipse mit einer negativen Zwergaxe vorstellen (§. 309. I. Zus.), mithin auch

2. die Subtangens der Hyperbel als eine Subtangens einer solchen Ellipse.

3. Nun ist für die Ellipse überhaupt:

$$PT = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$$ (§. 293. I.) folglich

4. für die Hyperbel:

$$PT = \frac{-2ax - 2x^2}{-a - 2x} = \frac{2ax + 2x^2}{a + 2x}$$

5. Nun ist ferner bey der Hyperbel:

$x = u - \frac{1}{2}a$ (§. 309. II. Zus.) also

6. $2ax + 2x^2 = 2au - a^2 + 2u^2 - 2au + \frac{1}{2}a^2$

$= 2u^2 - \frac{1}{2}a^2$, und

7. $a + 2x = a + 2u - a = 2u$, folglich

8. $$PT = \frac{2ax + 2x^2}{a + 2x} = \frac{2u^2 - \frac{1}{2}a^2}{2u} = \frac{4u^2 - a^2}{4u}$$

I. Zusatz: Eben so ist die Subnormal der Hyperbel, oder

$$PN = \frac{ap + 2px}{2a} = \frac{pu}{a}$$. Denn

$$PN = \frac{-ap - 2px}{-2a}$$ (§. 293. II.)

$$= \frac{ap + 2px}{2a} = \frac{p}{a}(\frac{1}{2}a + x) = \frac{pu}{a}$$ (§. 309. II. Zus.)

II. Zusatz: Der Krümmungshalbmesser der Hyperbel, oder

$$MC = \frac{(4a^2px + 4apx^2 + a^2p^2 + 4ap^2x + 4p^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{-2a^3p^2}$$

(§. 300. Nr. II.)

$$= -\frac{(a^2p^2 + 4ap^2x + 4p^2x^2 + 4a^2px + 4apx^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2}$$

$$= -\frac{[(ap + 2px)^2 + 4apx(a + x)]^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2}$$

III. Zusatz: Für $x = 0$, wird

$$MC = -\frac{(a^2p^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2} = -\frac{a^3p^3}{2a^3p^2} = -\tfrac{1}{2}p;$$

am Scheitel ist also der Krümmungshalbmesser wie bey der Parabel (§. 281. II. Zus) und Ellipse (§. 300. I. Zus.), aber in Rücksicht der Axe von entgegengesetzter Lage.

IV. Zusatz: Der hyperbolische Bogen endlich, oder

$$AM = \int \left(\frac{4a^2px + 4apx^2 + a^2p^2 + 4ap^2x + 4p^2x^2}{-8a^3\left(px + \frac{px^2}{a}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

(§. 300. III. Zus.) wo man aber erst nach §. 336 Arithm. das Integral suchen muß.

§. 315.

Aufgabe: (Fig. 98.)

Für einen gegebenen Punct M der Hyperbel, deren Zwergaxe und Brennpuncte gegeben sind, die Tangens zu verzeichnen.

I. Auflösung:

1. Man berechne die Subtangens PT (§. 314.) und schneide sie

2. von P aus, auf der großen Axe ab (§. 256.).

3. Ziehe zwischen T und M die gerade Linie TM; so ist sie die verlangte Tangens, denn zwischen T und M giebt es nur eine gerade Linie.

II. Auflösung:

4. Man ziehe die beyden Radios Vectores FM, fM, und

5. halbire durch eine gerade Linie den Winkel FMf.

6. Diese Linie verlängere man, bis sie mit der Axe in T zusammenstoßt, so ist

7. MT die gesuchte Tangens.

Beweis:

8. Man nehme auf dem Radius Vector fM, die Linie MR = FM, so, daß also

9. fR = fM — RM = fM — FM = a (§. 311) ist.

10. Nun ziehe man noch FR, so steht MT auf solcher senkrecht, und halbiret sie (§. 39. I. Zus. Geom.)

11. Man nehme nun an, die verlängerte Linie TM hätte ausser M noch einen Punct n mit der Hyperbel gemein, und ziehe

12. die geraden Linien Fn, fn, Rn, so ist aus Nr. 10.

13. Fn = Rn (§. 38. III. Zus. Geom.) mithin müßte

14. fn — Rn = fn — Fn = a (§. 311.) = fR (Nro. 9.), also

15.

15. fn = fR + Rn seyn, welches unmöglich ist (§. 35. Geom.), folglich ist

16. MT die gesuchte Tangens für M (§. 256.)

I. Zusatz: Für einen Punct M der Hyperbel giebt es nur eine Tangens MT; denn für M ist die Subtangens (§. 314.), also auch der Punct T auf der großen Axe vollkommen bestimmt, zwischen T und M aber giebt es nur eine gerade Linie.

II. Zusatz: Die Tangens MT für jeden Punct M halbiret allemal der Winkel FMf, welchen die beyden Radii Vectores einschliessen (II. Aufl. und I. Zus.).

III. Zusatz: Man findet für M die Normal, wenn man für diesen Punct die Tangens zieht, und durch M auf letzterer einen Perpendikel errichtet, und solchen verlängert, bis er mit der Zwergaxe in N zusammenstoßt (§. 256.).

IV. Zusatz: Wenn man die beyden Radios Vectores FM, fM sowohl, als die Tangens TM verlängert, so ist allemal der Winkel, welchen der eine Radius Vector mit der Tangens einschließt, so groß, als der Winkel, welchen die Verlängerung des andern Radius Vector mit der verlängerten Tangens einschließt, oder

f'MQ = FMT; und F'MQ = fMT.

Denn FMT = fMT (II. Zus.) = f'MQ (§. 13. Zus. Geom.), und eben so

fMT = FMT = F'MQ.

V.

V. Zusatz: Verlängert man die Normal, so ist ebenfalls

f'MN = FMN; und F'MN' = fMN'; denn

f'MQ + f'MN = 90° (III. Zus.) = FMT + FMN, nun ist

f'MQ = FMT (IV. Zus.) also

f'MN = FMN; eben so ist auch

F'MQ + F'MN' = 90° = fMT + fMN'

F'MQ = fMT, also

F'MN' = fMN'.

Anmerkung: Auf den beyden letztern Zusätzen beruhet eine ähnliche Anwendung in der Theorie des Schalles und Lichtes, wie §. 294.; Strahlen nemlich, die vom Brennpuncte F aus auf die hohle Seite der Hyperbel, das ist nach der Richtung FM auffallen, werden in der Richtung Mf' zurückgeworfen, als kämen sie vom andern Brennpuncte f her; und umgekehrt. Wenn hingegen ein Strahl von f auf die erhabene Seite der Hyperbel, also in der Richtung fM auffällt, so wird er nach MF' zurückgeworfen, als käme er vom Brennpuncte F her; und umgekehrt.

§. 316.

Lehrsatz: (Fig. 98.)

Wenn man am Scheitel A der Hyperbel auf ihrer großen Axe einen Perpendikel errichtet, und bis zur Tangens eines Punctes M verlängert, so ist solcher, oder

$$AI = \frac{px}{2\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}}$$

Beweis:

1. Für jede krumme Linie ist allgemein:

$$AI = y - \frac{xdy}{dx}$$ (§. 257. III. Zuf.)

2. Für die Hyperbel ist nun:

$$y = \sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}$$ (§. 307.), und

3. $$dy = \frac{1}{2}(px + \frac{px^2}{a})^{-\frac{1}{2}}(pdx + \frac{2pxdx}{a})$$

$$= \frac{pdx}{2\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}} + \frac{pxdx}{a\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}}$$

$$= \frac{ap + 2px}{2a\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}}\,dx$$, mithin

4. $$y - \frac{xdy}{dx} = \sqrt{(px + \frac{px^2}{a})} - \frac{apx + 2px^2}{2a\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}}$$

$$= \frac{2a(px + \frac{px^2}{a}) - apx - 2px^2}{2a\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}}$$, also

5. $$AI = \frac{2apx + 2px^2 - apx - 2px^2}{2a\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}} = \frac{px}{2\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}}$$

I. Zusatz: Wenn die Abscisse x unendlich, also x = ∞ gesetzt wird, so ist $px + \frac{px^2}{a} = \frac{px^2}{a}$ (§. 296 Arithm.); mithin

$$2\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})} = 2\sqrt{\frac{px^2}{a}} = 2x\sqrt{\frac{p}{a}},$$

folglich

$$AI = \frac{px}{2x\sqrt{\frac{p}{a}}} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{\frac{a}{p}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{ap} = \tfrac{1}{2}c$$

(§. 310.)

II. Zusatz: Die Entfernung des Punctes T, wo die Tangens die große Axe schneidet, vom Scheitel der Hyperbel, oder $AT = \frac{ax}{a+2x}$; denn allgemein ist für jede krumme Linie:

$AT =$ Subt. $- x$ (§. 257 II. Zus.) mithin in der Hyperbel

$$AT = \frac{2ax + 2x^2}{a+2x} - x \text{ (§. 314.)}$$

$$= \frac{2ax + 2x^2 - ax - 2x^2}{a+2x} = \frac{ax}{a+2x}$$

III. Zusatz: Für $x = \infty$; wird $a + 2x = 2x$, folglich $AT = \frac{ax}{2x} = \tfrac{1}{2}a$; es nähert sich nemlich AT der halben Zwergaxe AC um so mehr, je größer die Abscisse $AP = x$ angenommen wird, und eben so verhält es sich mit AI und ihrer

Grän-

Gränze der kleinern halben Axe oder $\frac{1}{2}$ c, die veränderliche Größe x ist also hier Hilfsgröße; da nun die Gleichungen für AI im Isten, und für AT im gegenwärtigen Zusatze nach §. 299 Arith. hergeleitet, und die Hilfsgröße x weggeschafft ist, so sind beyde vollständige Gleichungen (§. 301. Arithm.)

§. 317.

Aufgabe: (Fig. 101.)

Für die Hyperbel, deren größere und kleinere Axe, oder a, und c, gegeben sind, ihre Asymptoten zuziehen.

Auflösung:

1. Man errichte durch den Scheitel A auf die große Axe einen Perpendikel, und

2. nehme auf solchen $AI = AK = \frac{1}{2}$ c.

3. Nun ziehe man vom Mittelpuncte C der großen Axe nach I und K gerade Linien CG, CH, so sind sie Asymptoten der Hyperbel.

Beweis:

4. Die Asymptote ist eine Tangens, deren Berührungspunct vom Scheitel unendlich weit entfernt ist, wo also eine der Coordinaten unendlich seyn muß (§. 265.).

5. Ferner ist durch AT, und AI die Lage jeder Tangens, mithin auch jene der Asymptote gegeben (§. 265. III. und IV. Zus.).

6.

6. Nun ist aber bey der Hyperbel für $x = \infty$
$AT = AC = \frac{1}{2} a$ und
$AI = AK = \frac{1}{2} c$ (§. 316. I. und III. Zus.),
folglich sind

7. die zwischen A und I sowohl als zwischen A und K gezogenen Linien Asymptoten der Hyperbel.

I. Zusatz: $CI = CK$ (§. 38. III. Zus. Geom.) mithin ist ICK ein gleichschenklichtes Dreyeck.

II. Zusatz: $CI^2 = CK^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} c^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}$.

III. Zusatz: In der gleichseitigen Hyperbel (§. 310.) ist der Asymptotenwinkel ein rechter, oder wenn $a = c$, so ist $ICK = 90°$. Denn wenn $a = c$ so ist auch $\frac{1}{2} a = \frac{1}{2} c$, oder $AC = AI = AK$,
also $AIC = ACI = 45°$ } (§. 47. VI. Zus.
und $AKC = ACK = 45°$ } Geom.), folglich
$ACI + ACK = 90° = ICK$.

IV. Zusatz: Umgekehrt, wenn der Asymptotenwinkel ein rechter ist, so ist die Hyperbel gleichseitig, oder wenn $ICK = 90°$, so ist $a = c$. Denn wenn $ICK = 90°$, so ist $AIC = IKC$ (I. Zus.) $= 45°$ (§. 47. VI. Zus. Geom.) $= \frac{1}{2} ICK = ACI$, mithin $AI = AC$, oder $\frac{1}{2} c = \frac{1}{2} a$, also auch $a = c$.

V. Zusatz: Wenn man für eine beliebige Abscisse AP ihre senkrechte Ordinate bis an die Asymptoten bey-

beyderseits verlängert, so ist Pm = Pn, und Mm = Nn. Denn

$CA : AI = CP : Pm$; also $Pm = \frac{AI \cdot CP}{CA}$

$CA : AK = CP : Pn$; mithin $Pn = \frac{AK \cdot CP}{CA}$

$= \frac{AI \cdot CP}{CA}$ (per constr.) mithin Pm = Pn,

und PM = PN (§. 308. II. Zus.) folglich

Pm — PM = Pn — PN, das ist Mm = Nn.

§. 318.

Lehrsatz: (Fig. 101.)

Für jede Abscisse AP ist allemal $Mm \cdot Mn = \frac{1}{4} c^2$.

Beweis:

1. $\triangle ACI \sim \triangle PCm$, also

2. $CA : AI = CP : Pm$, oder

$\frac{1}{2} a : \frac{1}{2} c = u : Pm$, mithin auch

3. $a^2 : c^2 = u^2 : Pm^2$, und

$Pm^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2}$

$PM^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$ (§. 310. II. Zus.) folglich

4. $Pm^2 - PM^2 = \frac{1}{4} c^2$

5. Ferner $Pm^2 - PM^2 = (Pm + PM)(Pm - PM)$ (§. 103. Zus. Arithm.)

$= (Pn + PM) Mm$ (§. 317. V. Zus.)

$= Mn \cdot Mm$, folglich

6. $Mn \cdot Mm = \frac{1}{4} c^2$.

L

I. Zusatz: $Mm = \frac{c^2}{4Mn}$, mithin nähert sich die Asymptote dem Schenkel um so mehr, je mehr Mn, mithin die Abscisse CP wächst.

II. Zusatz: Da Mn. Mm $= \frac{1}{4} c^2$ eine beständige Größe ist, so kann Mm nie $= 0$ werden, folglich die Asymptote nie mit einem Schenkel der Hyperbel zusammenstossen.

§. 319.

Erklärung: (Fig. 101.)

Wenn man vom Scheitel A der Hyperbel auf die eine Asymptote CG eine gerade Linie AL, welche zur andern Asymptote CH parallel ist, zieht, so heißt das Quadrat dieser Linie, oder AL^2 die **Potenz** der Hyperbel.

Zusatz: CL = AL. Denn AI : IK = AL : CK, oder 1 : 2 = AL : CK, also

AL $= \frac{1}{2}$ CK $= \frac{1}{2}$ CI (§. 317. I. Zus.) ferner ist

AK : IK = CL : CI oder

1 : 2 = CL : CI also

CL $= \frac{1}{2}$ CI = AL.

§. 320.

Lehrsatz: (Fig. 101.)

Es ist die Potenz der Hyperbel, oder $AL^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$

Beweis:

1. AL # CK, (§. 319.), also

2. △AIL ∽ △KIC, mithin auch

3. Da CI = CK (§. 317. I. Zuf.) so ist ebenfalls IL = AL.

4. Ferner AI : IK = AL : CK = AL : CI, mithin

$$AL = \frac{AI.\ CI}{IK}, \text{ also}$$

$$5.\ AL^2 = \frac{AI^2.\ CI^2}{IK^2} = \frac{\frac{1}{4}c^2.\ (\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}{c^2}$$

(§. 317. II. Zuf.)

$$= \frac{1}{4}(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2) = \frac{a^2 + c^2}{16}$$

§. 321.

Erklärung: (Fig. 101.)

Wenn man vom Mittelpunct C der Hyperbel auf einer Asymptote die Abscisse CR, und von R bis an den nächsten Schenkel der Hyperbel zur andern Asymptote die Parallele RM als Ordinate zieht, so heißt die Gleichung, welche das allgemeine Verhältniß solcher Coordinaten angiebt, die Gleichung für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

§. 322.

Lehrsatz: (Fig. 101.)

Wenn man die Abscisse CR auf der Asymptote mit x, die Ordinate RM mit y, und die Potenz der

Hy-

Hyperbel, oder AL^2 mit p^2 bezeichnet, so ist die Gleichung für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten:

$$xy = p^2$$

Beweis:

1. Man ziehe von M auf die Axe die rechtwinklichte Ordinate MP, und verlängere sie beyderseits bis an die Asymptoten.

2. Nun ist Rm # Cn (per hyp.) mithin
mR : mM = CR : Mn (§. 82. Geom.)

3. Da ferner IK # mn, so ist
△MRm ∽ △KCI, also
mR : mM = IC : IK, mithin

4. IC : IK = CR : Mn, folglich

$$x = CR = \frac{IC}{IK} Mn = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2c} Mn$$

(§. 317. II. Zus.).

5. Ferner IK : CK = Mm : RM, mithin

$$y = RM = \frac{CK}{IK} Mm = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2c} Mm$$

folglich

6. $$xy = \frac{a^2 + c^2}{4c^2} Mn . Mm = \frac{a^2 + c^2}{4c^2} . \frac{c^2}{4}$$ (§. 318.)

$$= \frac{a^2 + c^2}{16} = p^2 \text{ (§. 320.).}$$

1. Zusatz: Da $y = \frac{p^2}{x}$, so nimmt die Ordinate immer mehr ab, je grösser die Abscisse x wird,

kann aber nie ganz verschwinden, so lange x eine endliche Größe ist.

II. Zusatz: Für eine andere Abscisse X auf der Asymptote, und Ordinate Y, ist ebenfalls $XY = p^2 = xy$, mithin $y : Y = X : x$ das heißt, die Ordinaten verhalten sich umgekehrt wie ihre Abscissen.

III. Zusatz: Zieht man durch den Scheitel A die Linie AL zur Asymptote CH parallel, so ist $CL = AL$ (§. 319. Zus.) $= p$, setzt man ferner von der Abscisse CR ihren veränderlichen Theil $LR = w$, so ist $x = p + w$, mithin $xy = (p + w)y = p^2$ (Lehrsatz.), welches ebenfalls eine Gleichung für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist.

§. 323.

Aufgabe: (Fig. 101.)

Das zwischen der Asymptote, der Hyperbel, und den Ordinaten AL, MR enthaltene Stück ALRM zu quadriren.

Auflösung:

1. Allgemein für schiefwinklichte Coordinaten, wovon die Abscisse w gesetzt wird, ist

$$R = \int \sin.\ \alpha.\ y\,dw \quad (\S.\ 268.\ \text{I. Zus.}).$$

2. Nun ist bey der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten

$(p + w)\,y = p^2$, mithin $y = \frac{p^2}{p + w}$,

folglich

3. $R = \int \text{sin. mRM} \frac{p^2}{p + w}\,dw$

$= \int p^2 \text{ sin. ICK} \frac{dw}{p + w}$

$= p^2$ sin. ICK log. nat. $(p + w) + C$ (§. 252 VI. Tab. Nr. 3).

4. Für $w = o$, ist auch $R = o$, mithin

$o = p^2$ sin. ICK log. nat. $p + C$, also

$C = -p^2$ sin. ICK log. nat. p. folglich

5. ALRM $= p^2$ sin. ICK log. nat. $(p + w) - p^2$ sin. ICK log. nat. p

$= p^2$ sin. ICK. log- nat. $\frac{p + w}{p}$

$= CL^2$ sin. ICK. log. nat. $\frac{CR}{CL}$

I. Zusatz: In der gleichseitigen Hyperbel ist ICK $= 90°$ (§. 317. III. Zus.), mithin sin. ICK $= 1$, folglich

ALRM $= CL^2$ log. nat. $\frac{CR}{CL}$

II. Zusatz: Nimmt man AL $=$ CL zum Maaße, setzt daher AL $=$ CL $= 1$, ferner CR $= n$ so ist ALRM $=$ log. nat. CR $=$ log. nat. n; das heißt, die Fläche ALRM giebt die Größe des natürlichen Logarithmus der entsprechenden Abs-

heissen vom Mittelpuncte an gerechnet; daher erhielten die natürlichen Logarithmen den Namen hyperbolischer Logarithmen.

§. 324.

Lehrsatz: (Fig. 102.).

Wenn man eine beliebige Sehne ME der Hyperbel bis an ihre Asymptoten verlängert, so ist allemal

$MR = EF$.

Beweis:

1. Man ziehe durch M und E zwischen den Asymptoten die Linien mn, eK auf die große Axe senkrecht, so ist

2. $\left.\begin{array}{l}\triangle RmM \backsim \triangle RKE \\ \triangle FEe \backsim \triangle FMn\end{array}\right\}$ (§. 92. Geom.), mithin

3. $RM : Mm = RE : EK$
$FM : Mn = FE : Ee$, also

4. $RM.MF : mM.Mn = RE.EF : KE.Ee$, das ist:
$RM.MF : \frac{1}{4}c^2 = RE.EF : \frac{1}{4}c^2$ (§. 318.) also

5. $RM.MF = RE.EF$, oder
$RM(ME + EF) = (RM + ME)EF$,
$RM.ME + RM.EF = RM.EF + ME.EF$, also
$RM.ME = ME.EF$, und folglich

6. $RM = EF$.

1. Zusatz: Wenn man zwischen den Asymptoten die gerade Linie Tt zieht, welche die Hyperbel im Puncte o berührt, so ist allemal $To = ot$; denn

man

man ziehe zur Tangens Tt eine parallele Sehne ME, und verlängere sie bis an die Asymptoten, so ist allemal RM = EF, man mag auch die Sehne so nahe an der Tangens ziehen, als man will, ist nun ihre Entfernung Null, so fallen R, F auf T, t und die beyden Puncte M, F zusammen auf o.

II. Zusatz: Wenn man vom Berührungspunct o der Tangens Tt auf die eine Asymptote CH eine Linie oL zieht, welche zur andern Asymptote CG parallel ist, so ist:

TL : LC = To : ot, folglich TL = LC.

III. Zusatz: Um also für einen gegebenen Punct o der Hyperbel eine Tangens zwischen ihren Asymptoten zu ziehen, so darf man nur durch o auf die eine Asymptote CH eine Linie oL ziehen, welche zur andern Asymptote CG parallel ist, ferner auf der ersten LT = CL nehmen, und von T nach o eine gerade Linie ziehen.

IV. Zusatz: Wenn man durch den Mittelpunct C der Hyperbel, und den Berührungspunct o der Tangens Tt eine gerade Linie CD zieht, so halbirt solche RF sowohl, als jede Sehne ME, welche zu Tt parallel ist. Denn Co : ot = CD : DF. und Co : oT = CD : DR; da nun die ersten 3 Glieder in beyden Proportionen einander gleich sind, so ist DF = DR, ferner FE = RM (Lehrsatz.), mithin DF — FE = DR — RM, folglich DE = DM.

§. 325.

Lehrsatz: (Fig. 102.)

Wenn man durch den Mittelpunct C der Hyperbel, und den Berührungspunct o der Tangens, zwischen den Asymptoten eine gerade Linie CQ zieht, und auf ihr die Abscissen vom Mittelpuncte an nimmt, ferner die Ordinaten mit obiger Tangens parallel sind, und $Co = \frac{1}{2} m$; $ot = oT = \frac{1}{2} n$; die Abscisse $CD = w$; die Ordinate $DE = DM = Z$ gesetzt werden, so ist

$$Z^2 = \frac{n^2}{m^2} (w^2 - \tfrac{1}{4} m^2)$$

Beweis:

1. Man ziehe durch E und o zwischen den Asymptoten die Linien sr, eK auf die große Axe senkrecht.

2. $\triangle Cot \sim CDF$; mithin

3. $Co : ot = CD : DF$, oder
   $\frac{1}{2} m : \frac{1}{2} n = w : DF$, also

4. $DF = \frac{nw}{m}$

5. Ferner $\triangle FeE \sim \triangle tso$,
   und $\triangle KRE \sim \triangle rTo$, mithin

6. $FE : Ee = ot : os$
   $ER : EK = oT : or$, also

7. $FE.\ ER : eE.\ EK = to.\ oT : so.\ or$, oder
   $FE.\ ER : \frac{1}{4} c^2 = \frac{1}{4} n^2 : \frac{1}{4} c^2$ (§. 318.), mithin

8.

8. $\frac{1}{4} n^2 = FE. ER = (FD - DE) (DR + DE)$
$= (FD - DE) (FD + DE)$ (§. 324 IV. Zuſ.)
$= (\frac{nw}{m} - Z) (\frac{nw}{m} + Z)$ (Nr. 4.)
$= \frac{n^2w^2}{m^2} - Z^2$ (§. 103. Zuſ. Arithm.), folglich

9. $Z^2 = \frac{n^2w^2}{m^2} - \frac{1}{4} n^2 = \frac{n^2}{m^2} (w^2 - \frac{1}{4} m^2)$

I. Zuſatz: $Z = \pm \frac{n}{m} \sqrt{(w^2 - \frac{1}{4} m^2)}$, mithin für $w = \pm \frac{1}{2} m$ iſt allemal $Z = o$, das iſt, in der Entfernung $\frac{1}{2} m$ ſchneidet auf beyden Seiten die Abſciſſenlinie die Hyperbel in o auf der einen, und in O auf der andern Seite.

II. Zuſatz: Für jedes $w > \pm \frac{1}{2} m$ giebt es in der obern und untern Hyperbel zwey einander gleiche aber entgegengeſetzte Ordinaten, mithin iſt die Abſciſſenlinie CQ ein Diameter der Hyperbel.

III. Zuſatz: Im ſtrengen Sinne verſteht man aber unter einem Diameter der Hyperbel, nur den Theil Oo eines ſolchen, welcher zwiſchen den beyden Durchſchnittspuncten liegt, ſo wie die gerade Linie $\alpha\beta$, welche durch den Mittelpunct mit der Tangens tT parallel ſo gezogen worden, daß zugleich $C\alpha = C\beta = ot = \frac{1}{2} n$ iſt, deſſen conjugirter Diameter heißt (§. 296.).

IV.

IV. Zusatz: Die Gleichung aus zweyen conjugirten Diametern ist bey der Hyperbel der Gleichung aus den beyden Axen (§. 310. II. Zus.) vollkommen ähnlich.

§. 326.

Aufgabe: (Fig. 98.)

Den zwischen dem Bogen AM, und den rechtwinklichten Coordinaten AP, PM begränzten Raum der Hyperbel zu quadriren.

Auflösung:

1. Allgemein ist $R = \int y dx$ (§. 268.)

2. Nun ist bey der Hyperbel: $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ (§. 307.) oder

$y^2 = \frac{p}{a}(ax + x^2)$ mithin

3. $y = p^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} (ax + x^2)^{\frac{1}{2}}$, und

4. $\int y dx = \int p^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} dx (ax + x^2)^{\frac{1}{2}}$.

5. Dieses Integral läßt sich nun aus §. 252 der VI. Tabelle Nr. 8. bestimmen; es ist nemlich

6. $APM = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}} (a + 2x) \sqrt{(ax + x^2)} - \frac{1}{8} a^2 \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \text{log.nat.} [x + \frac{1}{2} a + \sqrt{(ax + x^2)}] + C$

7. Nun ist für $x = 0$, auch $APM = 0$, mithin

8.

8. $\bullet = -\frac{1}{8}\sqrt{}pa^3$. log. nat $\frac{1}{2}a + C$, also
$C = \frac{1}{8}\sqrt{}pa^3$. log. nat. $\frac{1}{2}a$, folglich

9. $APM = \frac{\sqrt{p}}{4\sqrt{a}}(a+2x)\sqrt{}(ax+x^2)$
$-\frac{1}{8}\sqrt{}pa^3$. log. nat. $[x+\frac{1}{2}a+\sqrt{}(ax+x^2)]$
$+\frac{1}{8}\sqrt{}pa^3$. log. nat. $\frac{1}{2}a$.

§. 327.

Aufgabe: (Fig. 98.)

Die Oberfläche des hyperbolischrn Sphäroids zu bestimmen, welches der Bogen AM beschreibt, wenn er sich um die Zwergaxe AB der Hyperbel dreht.

Auflösung:

1. Die Gleichung für die Hyperbel aus ihren beyden Axen, und Abscissen vom Mittelpunct angerechnet ist:

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - \tfrac{1}{4}a^2)$$ (§. 310. II. Zus.).

2. Verfährt man nun wie §. 302. Nr. 1 — 6, so erhält man

3. $2\pi y(du^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{c\pi du}{a^2}(4(a^2+c^2)u^2 - a^4)^{\frac{1}{2}}$

4. Setzt man nun $e = \frac{1}{2}\sqrt{}(a^2+c^2)$ (§. 310. III. Zus.), so ist
$e^2 = \frac{1}{4}(a^2+c^2)$, mithin $16e^2 = 4(a^2+c^2)$, folglich

5. $Q = \int \frac{c\pi du}{a^2} (16e^2u^2 - a^4)^{\frac{1}{2}}$

$= \int \frac{4\,ce\pi du}{a^2} (u^2 - \frac{a^4}{16e^2})^{\frac{1}{2}} + C$

6. Dieses Integral läßt sich nun aus §. 152 Tab. VI. Nr. 6 bestimmen, es ist nemlich

7. $Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\,ce\pi}{a^2} u \sqrt{(u^2 - \frac{a^4}{16e^2})}$

$- \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{16e^2} \cdot \frac{4\,ce\pi}{a^2}$ log. nat. $[u + \sqrt{(u^2 - \frac{a^4}{16e^2})}] + C$

$= \frac{2\,ce\pi u}{a^2} \sqrt{(\frac{16\,e^2u^2 - a^4}{16\,e^2})} - \frac{a^2\,c\pi}{8e}$

log. nat. $[u + \sqrt{(\frac{16\,e^2u^2 - a^4}{16\,e^2})}] + C$

$= \frac{c\pi u}{2a^2} \sqrt{(16\,e^2u^2 - a^4)} - \frac{a^2c\pi}{8e}$

log. nat. $[\frac{4\,eu + \sqrt{(16e^2\,u^2 - a^4)}}{4\,e}] + C$

8. Nun ist für $u = \frac{1}{2}\,a$, die Fläche $Q = o$, mithin

9. $o = \frac{ac\pi}{4a^2} \sqrt{(4e^2\,a^2 - a^4)} - \frac{a^2\,c\pi}{8e}$

log. nat. $[\frac{2\,ac + \sqrt{(4a^2\,e^2 - a^4)}}{4\,e}] + C$

$=$

$$= \frac{c\pi}{4} \sqrt{(4e^2 - a^2)} - \frac{a^2 c\pi}{8e}$$

$$\text{log. nat.} \left[\frac{2ae + a\sqrt{(4e^2 - a^2)}}{4e}\right] + C, \text{ also}$$

10. $$C = \frac{a^2 c\pi}{8e} \text{ log. nat.} \left[\frac{2ae + a\sqrt{(4e^2 - a^2)}}{4e}\right]$$

$$- \frac{c\pi}{4} \sqrt{(4e^2 - a^2)}, \text{ folglich}$$

11. $$Q = \frac{c\pi u}{2a^2} \sqrt{(16e^2u^2 - a^4)}$$

$$- \frac{c\pi}{4} \sqrt{(4e^2 - a^2)} + \frac{a^2 c\pi}{8e}$$

$$\text{log. nat.} \frac{2ae + a\sqrt{(4e^2 - a^2)}}{4eu + \sqrt{(16e^2u^2 - a^4)}}$$

12. Setzt man endlich für $16e^2$, und $4e^2$ deren Werthe, so wird

$$Q = \frac{c\pi u}{2a^2} \sqrt{(4a^2u^2 + 4c^2u^2 - a^4)} - \frac{c^2\pi}{4}$$

$$+ \frac{a^2 c\pi}{8e} \text{ log. nat.} \frac{2ae + ac}{4eu + \sqrt{(4a^2u^2 + 4c^2u^2 - a^4)}}$$

§. 328.

Aufgabe: (Fig. 98.)

Die hohle krumme Fläche zu quadriren, welche der hyperbolische Bogen AM beschreibt, wenn er sich um die kleine Axe DE dreht.

Auf-

Auflösung:

1. Für Abscissen auf der kleinen Axe von ihrem Mittelpuncte aus ist $u^2 = \frac{a^2}{c^2}(y^2 + \frac{1}{4}c^2)$ (§. 310. X. Zus.).

2. Behandelt man diese Gleichung wie §. 304. und setzt $e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + c^2)}$ (§. 310. III. Zus.), so erhält man:

$$3.\ Q = \frac{a\pi y}{2c^2}\sqrt{(c^4 + 4a^2y^2 + 4c^2y^2)} + \frac{ac^2\pi}{8e}\text{ log. nat. }\left[\frac{4ey + \sqrt{(c^4 + 4a^2y^2 + 4c^2y^2)}}{c^2}\right]$$

§. 329.

Aufgabe: (Fig. 98.)

Das hyperbolische Sphäroid zu cubiren, welches der Bogen AM beschreibt, wenn er sich um die Zwergaxe AB dreht.

Auflösung:

1. Nimmt man auf der großen Axe die Abscissen vom Scheitel an, so ist:

$$2.\ y^2 = px + \frac{px^2}{a}\text{, also}$$

$$3.\ K = \int \pi\, y^2 dx\ (\text{§. 270. I.}) = \int \pi\,(pxdx + \frac{px^2dx}{a})$$

$$= \pi\,(\tfrac{1}{2}px^2 + \frac{px^3}{3a}) + C$$

4. Da aber für $x = o$, die ganze Gleichung Null wird, so ist auch $C = o$, folglich

5. $K = \pi . \frac{3apx^2 + 2px^3}{6a} = \frac{\pi px^2}{6a}(3a + 2x)$.

Zusatz: Für jeden Kegelschnitt ist:

$K = \frac{\pi px^2}{6a}(3a \mp 2x)$; denn für die Hyperbel leuchtet solches aus der vorhergehenden Aufgabe, so wie für die Ellipse aus §. 306. VI, Zus. unmittelbar ein; bey der Parabel ist nun $a = \infty$, mithin

$K = \frac{\pi px^2}{6\infty}(3\infty \mp 2x) = \frac{3\pi px^2}{6} = \frac{1}{2}\pi px^2$

(§. 286.).

V. Abschnitt.

Vom Kreise.

§. 330.

Aufgabe: (Fig. 82.)

Den spitzigen Kreisbogen $AM = Z$ aus dessen Sinus $MP = y$ für den Halbmesser 1 zu rectificiren.

Auflösung:

1. Wenn man den Diameter AO zur Abscissenlinie, und A als ihren Anfangspunct nimmt, so ist der Quersinus $AP = x$, und $AO = 2$, mithin

2. $y^2 = 2x - x^2$ (§. 101. Zuſ. Geom.), alſo

$$2ydy = 2dx - 2xdx, \text{ oder}$$

$$ydy = dx - xdx, \text{ alſo}$$

$$dx = \frac{ydy}{1-x}, \text{ und}$$

$$dx^2 = \frac{y^2}{1-2x+x^2}dy^2 = \frac{y^2}{1-y^2}dy^2,$$

folglich

$$3.\ dy^2 + dx^2 = (1 + \frac{y^2}{1-y^2})dy^2 = \frac{1}{1-y^2}dy^2,$$

und

$$4.\ \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dZ\ (\S.267) = dy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

5. Nun iſt aus §. 138. Arithm.

$$(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}y^2 + \frac{1(1+2)}{1.2.4}y^4$$

$$+ \frac{1(1+2)(1+4)}{1.2.3.8.}y^6$$

$$+ \frac{1(1+2)(1+4)(1+6)}{1.2.3.4.16}y^8 + \ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{3}{8}y^4 + \tfrac{5}{16}y^6 + \tfrac{35}{128}y^8 + \ldots\ldots,$$

mithin

$$6.\ dZ = dy + \tfrac{1}{2}y^2dy + \tfrac{3}{8}y^4dy + \tfrac{5}{16}y^6dy + \tfrac{35}{128}y^8dy + \ldots\ldots$$

$$7.\ Z = y + \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{3}{40}y^5 + \tfrac{5}{112}y^7 + \tfrac{35}{1152}y^9 + \ldots$$ (§. 336. Arithm.)

8. Da endlich für $x = 0$, y ſowohl als Z Null iſt, ſo wird auch $C = 0$, man darf alſo keine beſtändige Größe addiren.

Zu

Zusatz: Für $y = 1$ ist $Z = \frac{1}{4}\pi$, mithin

$$\frac{1}{4}\pi = 1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \frac{5}{112} + \frac{35}{1152} + \ldots\ldots$$

Da aber diese Reihe nur wenig convergirend ist, so müßte man eine beträchtliche Anzahl Glieder derselben berechnen, um den Quadranten, oder $\frac{1}{4}\pi$ mit einiger Schärfe zu bestimmen.

§. 331.

Aufgabe:

Für den Halbmesser 1 aus der gegebenen Tangens t ihren entsprechenden Kreisbogen Z zu rectificiren.

Auflösung:

1. Wenn man §. 244. $a = 1$, $x = t$; Arc. tang. $x = Z$ setzt, so ist

2. $dZ = dt\,(1 + t^2)^{-1} = \frac{1}{1+t^2}\,dt$

3. Nun ist $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - t^{10} + \ldots\ldots$, (§.109 III. Zus. Arithm.) mithin

4. $dZ = dt - t^2\,dt + t^4\,dt - t^6\,dt + t^8\,dt - t^{10}\,dt + \ldots\ldots$, und

5. $Z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \frac{1}{11}t^{11} + \ldots\ldots$
$= t\,(1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^4 - \frac{1}{7}t^6 + \frac{1}{9}t^8 - \frac{1}{11}t^{10} + \ldots\ldots)$

6. Da wieder für $t = 0$, alle Glieder der Reihe sowohl, als Z selbst Null sind, so ist auch $C = 0$, man darf daher keine beständige Größe addiren.

I. Zusatz: Für den Bogen von $45°$ oder $\frac{1}{8}\pi$ ist t $= 1$ (§. 300. II. Zus. Trig.) mithin

$$\frac{1}{8}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots.$$

Da aber diese Reihe ebenfalls wenig convergirend ist, so ist sie zur Bestimmung von π nicht schicklich.

II. Zusatz: Wenn $\alpha + \beta = 45°$, so ist

$$\text{tang.}(\alpha + \beta) = 1 = \frac{\text{tang. } \alpha + \text{tang. } \beta}{1 - \text{tang. } \alpha \text{ tang. } \beta}$$

(§. 310. Trigon.), also

$$1. - \text{tang. } \alpha \text{ tang. } \beta = \text{tang } \alpha + \text{tang. } \beta$$

$$1 - \text{tang. } \beta = \text{tang. } \alpha + \text{tang. } \alpha \text{ tang. } \beta$$

$$= \text{tang. } \alpha (1 + \text{tang. } \beta), \text{ also}$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{1 - \text{tang. } \beta}{1 + \text{tang. } \beta}$$

III. Zusatz: Für $\alpha + \beta = 45°$ hat β keinen bestimmten Werth, man kann also β so bestimmen, daß $\text{tang. } \beta = \frac{1}{2}$ ist;

Nun wird: $\text{tang. } \alpha = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$ (II. Zus.) $= \frac{1}{3}$.

IV. Zusatz: Setzt man die gefundenen Werthe dieser beyden Tangenten in die Gleichung Nr. 5 so wird

$$\alpha = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^6} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^8} - \ldots.\right)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^6} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^8} - \ldots\right)$$

§. 332.

Aufgabe:

Das Verhältniß des Diameters zur Peripherie im Kreise zu bestimmen (§. 127. Geom.)

Auflösung:

1. Man setze den Halbmesser $= 1$, und
2. $\alpha + \beta = 45°$ so, daß
3. Ueberdieß tang. $\beta = \frac{1}{2}$ ist (§. 331. III. Zus.), so wird

$$4.\ \alpha = \frac{1}{3}\cdot\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^6} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^8} - \ldots\right)$$

$$5.\ \beta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^6} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^8} - \ldots\right)$$

6. Nun reducire man in jeder Reihe die positiven und negativen Glieder abgesondert auf Decimalbrüche, so ist:

7. $1 = 1{,}0000000000$

$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^4} = 0{,}0024691358$

$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^8} = 0{,}0000169350$

$\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3^{12}} = 0{,}0000001447$

$\frac{1}{17} \cdot \frac{1}{3^{16}} = 0{,}0000000013$

$1{,}0024862168$

8. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} = 0{,}0370370370$

$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^6} = 0{,}0001959631$

$\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{10}} = 0{,}0000015395$

$\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3^{14}} = 0{,}0000000139$

$\frac{1}{19} \cdot \frac{1}{3^{18}} = 0{,}0000000001$

$0{,}0372345536$, mithin

9. $1{,}0024862168$

$- \quad 0{,}0372345536$

$\alpha = \frac{1}{3}\, 0{,}9652516632$ (Nr. 4.)

$= 0{,}3217505544$

10. $1 = 1{,}0000000000$

$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^4} = 0{,}0125000000$

$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^8} = 0{,}0004340277$

$\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^{12}} = 0{,}0000187800$

$\frac{1}{17} \cdot \frac{1}{2^{16}} = 0{,}0000008975$

$\frac{1}{21} \cdot \frac{1}{2^{20}} = 0{,}0000000454$

$\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^{24}} = 0{,}0000000023$

$1{,}0129537529$

11. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} = 0{,}0833333333$

$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^6} = 0{,}0022321428$

$\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2^{10}} = 0{,}0000887784$

$\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2^{14}} = 0{,}0000040690$

$\frac{1}{19} \cdot \frac{1}{2^{18}} = 0{,}0000002007$

$\frac{1}{23} \cdot \frac{1}{2^{22}} = 0{,}0000000103$

$\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{2^{26}} = 0{,}0000000005$

$= 0{,}0856585350$, mithin

12. $1{,}0129537529$
$- 0{,}0856585350$

$\beta = \frac{1}{2}\ 0{,}9272952179$ (Nr. 5.)
$= 0{,}4636476090$
$\alpha = 0{,}3217505544$ (Nr. 9.), also

13. $\alpha + \beta = 0{,}7853981634 = \frac{1}{8}\pi$, folglich
$\frac{1}{2}\pi = 3{,}1415926536$, das ist

14. $1 : \frac{1}{2}\pi = 1 : 3{,}1415926536$, mithin auch
$2 : \pi = 1 : 3{,}1415926536$, welches das gesuchte Verhältniß des Diameters zur Peripherie ist.

Anmerkung:

Um für die in der Geometrie §. 275. III. Aufl. zur Ausmessung des Faßes aufgestellten Regeln ihre Gründe anzugeben, und für den Anfänger zur Uebung, füge ich nachstehende Aufgaben bey.

§. 333.

Aufgabe: (Fig. 103.)

Aus der Länge GI, der Tiefe EF, und dem Diameter AB eines Bodens den körperlichen Inhalt des Faßes zu bestimmen, wenn man den Bogen AEC als eine Parabel, EF für die Axe derselben, und das Faß selbst als ein abgekürztes Sphäroid nimmt, welches der Bogen AEC erzeuget, wenn er sich um GI dreht.

Auf-

Auflösung:

1. Für den beliebigen Punct M ziehe man die senkrechte Ordinate MQ, und auf GI den Perpendikel MO.

2. Bestimmt man die Abscissen vom Scheitel aus und bezeichnet den Parameter mit p, so ist
$EQ = x$,
$MQ = OH = y$; und $y^2 = px$ (§. 274.).

3. Nun ziehe man AN mit GH parallel und setze der Kürze wegen:
$AG = \frac{1}{2} AB = \beta$; $EH = \frac{1}{2} EF = b$; $EN = b - \beta = c$; ferner
$GH = \frac{1}{2} GI = l$; und $\frac{1}{p} = n$, so wird

4. $x = \frac{1}{p} y^2$ (Nr. 2.) $= ny^2$;
$MO = QH = b - x = b - ny^2$.

5. Zieht man endlich noch mo ∥ MO, so ist Oo $= dy$.

6. Dreht sich nun das Flächenelement MOom um GH, so wird das Körperelement, oder
$dK = \pi . MO^2 . Oo$ (§. 270.) $= \pi (b - ny^2)^2 dy$
$= \pi (b^2 - 2bny^2 + n^2y^4) dy$, mithin

7. $K = \pi (b^2 y - \frac{2}{3} bny^3 + \frac{1}{5} n^2y^5)$;
$= \pi y (b^2 - \frac{2}{3} bny^2 + \frac{1}{5} n^2y^4)$

8. Da endlich für $x = o$, y sowohl, als K, mithin alle Glieder dieser Gleichung verschwinden,

so

so ist C = o, mithin darf keine beständige Größe addirt werden.

9. Setzt man x = EN = c (Nr. 3.), so wird y = AN = l, und $x = ny^2 = c$; $n^2y^4 = c^2$ (Nr. 4.) folglich der körperliche Inhalt des halben Faßes aus Nr. 7., oder

10. $\frac{1}{2}$ Dol. = π l $(b^2 - \frac{2}{3} bc + \frac{1}{5} c^2)$, und

Dol. = π 2l $(b^2 - \frac{2}{3} bc + \frac{1}{5} c^2)$

I. Zusatz: Für die Länge GI = 43, Tiefe EF = 30, Diameter AB = 24, alles in baierischen Decimalzoll bestimmt, wird 2 l = 43; b = 15; β = 12; c = 3; mithin

$b^2 = 225$	log. 196,8 = 2,2940251
$\frac{1}{5} c^2 = 1,8$	log. π = 0,4971499
$b^2 + \frac{1}{5} c^2 = 226,8$	log. 2 l = 1,6334685
$\frac{2}{3} bc = 30$	log. Dol. = 4,4246435
$b^2 - \frac{2}{3} bc + \frac{1}{5} c^2 = 196,8$	

mithin Dol. = 26585 baier. Decimal-Cubikzoll

Da nun eine baierische Maß 43 Dec. Cubikzoll, und der Eymer zu 60 Maß 2580 baierische Decimal-Cubikzoll hält (Arithm. Anh.), so beträgt der Inhalt dieses Faßes 10 Eymer 18 $\frac{1}{4}$ Maß.

II. Zusatz. Wäre der Diameter CD des andern Bodens von AB unterschieden, so müßte man jede Hälfte des Faßes besonders berechnen.

§. 334.

Aufgabe: (Fig. 103.)

Aus der Länge GI, Tiefe EF, und Diameter AB des Bodens, den körperlichen Inhalt des Faßes zu suchen, wenn man AEC als einen elliptischen Bogen, EF als die kleine, GI als einen Theil der großen Axe, und das Faß selbst als ein abgekürztes elliptisches Sphäroid nimmt, welches der Bogen AEC begränzt, indem er sich um die große Axe GI dreht.

Auflösung:

1. Wenn man die Abscissen auf der großen Axe vom Mittelpunct H an rechnet, so ist für den Punct M, $MO = y$, $HO = u$, und wenn man die kleine Axe $EF = 2b$, also $EH = b$, und die große Axe $= 2a$ setzt, so wird (§. 290. V. Zus.)

2. $y^2 = b^2 - \frac{b^2u^2}{a^2}$, und

3. das von der Fläche MOHE beschriebene Sphäroid §. 306, oder

$$K = \pi u \left(b^2 - \frac{b^2u^2}{3a^2}\right)$$

4. Nun ist aus Nr. 2.

$a^2y^2 = b^2a^2 - b^2u^2$; $a^2(b^2 - y^2) = b^2u^2$

also

$$a^2 = \frac{b^2u^2}{b^2 - y^2}, \text{ mithin}$$

5.

5. $K = \pi u \left(b^2 - \frac{b^2u^2}{3} \times \frac{b^2 - y^2}{b^2 u^2}\right)$

$= \pi u \left(b^2 - \frac{1}{3} b^2 - \frac{1}{3} y^2\right)$

$= \pi u \left(\frac{2}{3} b^2 - \frac{1}{3} y^2\right)$

5. Man ſetze nun wieder $GH = \frac{1}{2} GI = l$; $AG = \frac{1}{2} AB = \beta$, und $b - \beta = c$, alſo $\beta = b - c$, ſo wird

6. für $u = l$, $y = \beta = b - c$, und $K = \frac{1}{2}$ Dol. mithin

7. $\frac{1}{2}$ Dol. $= \pi l \left(\frac{2}{3} b^2 + \frac{1}{3} \beta^2\right)$, oder auch

$= \pi l \left(\frac{2}{3} b^2 + \frac{1}{3} b^2 - \frac{2}{3} bc + \frac{1}{3} c^2\right)$

$= \pi l \left(b^2 - \frac{2}{3} bc + \frac{1}{3} c^2\right)$, folglich

8. Dol. $= \pi 2l \left(\frac{2}{3} b^2 + \frac{1}{3} \beta^2\right)$

$= \pi 2l \left(b^2 - \frac{2}{3} bc + \frac{1}{3} c^2\right)$

I. Zuſatz: Letztere Gleichung dient zur Vergleichung mit der vorhergehenden §. 333.

II. Zuſatz: Dol. $= \frac{1}{3} \pi 2l \left(2 b^2 + \beta^2\right)$, das iſt nach der Figur

$= \frac{1}{3} \pi AC \left(\frac{2 EF^2 + AB^2}{4}\right) = \frac{\pi AC (2EF^2 + AB^2)}{12}$

welches die im §. 275. Zuſ. Geom. aufgeſtellte Regel iſt.

III. Zuſatz: Bey verſchiedenen Faßböden, wo alſo AB, CD ungleich ſind, muß man jede Hälfte des Faßes beſonders ſuchen; es iſt alsdann:

Dol.

$$\text{Dol.} = \tfrac{1}{3}\pi.\tfrac{1}{2}\,AC\left(\frac{2\,EF^2 + AB^2}{4}\right)$$

$$+\tfrac{1}{3}\pi.\tfrac{1}{2}\,AC\left(\frac{2\,EF^2 + CD^2}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi.\,AC\,(4\,EF^2 + AB^2 + CD^2)}{24}$$

So wie es die III. Auflösung des 275. §. der Geometrie angiebt.

IV. Zusatz: Wenn wie im vorhergehenden §. $2l = 43$, $b = 15$; $\beta = 12$ baier. Decimalzoll beträgt, so ist

$\frac{2}{3}\,b^2 = 150$	ferner log. 198 = 2,2966652
$\frac{1}{3}\,\beta = 48$	log. π = 0,4971499
$\frac{2}{3}\,b^2 + \frac{1}{3}\,\beta^2 = 198$	log. 43 = 1,6334685
	log. Dol. = 4,4272836

Mithin Dol. = 26748 baier. Decimalcubikzoll; folglich hält solches 10 Eymer 22 Maß.

§. 335.

Aufgabe: (Fig. 103.)

Aus der gegebenen Länge GI, Spundtiefe EF, und Diameter AB eines Bodens den körperlichen Inhalt des Faßes zu suchen, wenn man AEC als einen Kreisbogen, dessen Halbmesser AK ist, und das Faß als ein abgekürztes Sphäroid nimmt, welches durch Umdrehung der Fläche GAECI um GI entstanden ist.

Auf-

Auflösung:

1. Man ziehe durch A zu GI die Parallele AC, und nehme auf ihr die Abscissen von A aus.

2. Von M ziehe man MQ mit AN parallel, und MO auf GI senkrecht,

3. Nun setze man: $AP = x$, $PM = y$;
$AG = \frac{1}{2} AB = \beta$; $EH = \frac{1}{2} EF = b$; $EN = b - \beta = c$;
$AN = GH = \frac{1}{2} GI = l$; $AK = MK = r$;
$KN = f$, so ist

4. $MO = OP + PM = \beta + y$; $MQ = PN = AN - AP = l - x$;
$KQ = KN + NQ = f + y$; $KE = r = f + c$.

5. Da sich nun der Bogen AEC nicht um die Abscissenlinie AC, sondern um die Parallele GI dreht, so muß in der Formel §. 270 statt y die Größe $MO = \beta + y$ gesetzt werden, mithin ist gegenwärtig:

6. $dK = \pi (\beta + y)^2 dx = \pi (\beta^2 + 2\beta y + y^2) dx$, mithin

7. $K = \pi (\beta^2 x + 2\beta \int y dx + \int y^2 dx)$
wo $C = o$ ist, weil für $x = o$ alle Glieder auf beyden Seiten verschwinden.

8. Nun ist im Kreise aus §. 101. Geometrie:
$EN : AN = AN : 2r - EN$, oder nach Nr. 3.

$c : l = l : 2r - c$, also

$2rc - c^2 = l^2$, mithin

9. $r = \frac{l^2 + c^2}{2c} = \frac{l^2}{2c} + \frac{1}{2}c = f + c$ (Nr. 4.)

10. Im rechtwinklichten Dreyecke KQM iſt

$MQ^2 + KQ^2 = KM^2$, oder

$(l - x)^2 + (f + y)^2 = (f + c)^2$ (Nr. 4.);

$l^2 - 2lx + x^2 + f^2 + 2fy + y^2 = f^2 + 2fc + c^2$, mithin

11. $y^2 + 2fy = 2fc + c^2 - l^2 + 2lx - x^2$

12. Nun iſt aus Nr. 9: $f = \frac{l^2}{2c} - \frac{1}{2}c$, alſo

$2cf = l^2 - c^2$.

Setzt man dieſen Werth auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung, ſo wird

13. $y^2 + 2fy = l^2 - c^2 + c^2 - l^2 + 2lx - x^2$

$= 2lx - x^2$, mithin

$y^2 = 2lx - x^2 - 2fy$, folglich

$y^2\,dx = 2lx\,dx - x^2\,dx - 2fy\,dx$, und

14. $\int y^2\,dx = lx^2 - \frac{1}{3}x^3 - 2f\int y\,dx$.

Setzt man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 7., ſo wird

15. $K = \pi\,(\beta^2 x + lx^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2(\beta - f)\int y\,dx)$

16. Nun iſt $\int y\,dx$ dem unbeſtimmten Segmente AMP gleich (§. 268.); für die Abſciſſe $x = l$, wird ſolches dem Abſchnitte AEN, ſo wie K dem halben Faße gleich. Man ſetze nun Segm. AEN $=$ W, ſo wird

17.

17. $\frac{1}{2}$ Dol. $= \pi (\beta^2 l + l^3 - \frac{1}{3} l^3 + 2 (\beta - f) W)$
$= \pi (\beta^2 l + \frac{2}{3} l^3 + 2 \beta W - 2 f W)$

18. Wenn AME die wahre Länge dieses Bogens, und ϑ die relative Länge eben desselben in Theilen des Halbmessers 1 bezeichnen, so ist: AK : AN $=$ 1 : sin. ϑ (§. 323. Trig.), oder aus Nr. 3 und 4.
$f + c : l = 1 : \sin. \vartheta$, mithin

$$\sin. \vartheta = \frac{l}{f + c}$$

19. Ferner ist 1 : r $=$ ϑ : AME, mithin
AME $=$ r ϑ $=$ $(f + c) \vartheta$. folglich

20. Sector AKE $= \frac{1}{2} (f + c)^2 \vartheta$ (§. 151. IV. Zus. Geom.).
$\triangle$AKN $= \frac{1}{2}$ KN. AN $= \frac{1}{2} fl$, also

21. $W = \frac{1}{2} (f + c)^2 \vartheta - \frac{1}{2} fl$ (§. 151. V. Zus. Geom.)

22. Ferner setze man ϑ — sin. $\vartheta = u$, wo also u eine Zahl ist, weil ϑ sowohl, als sin. ϑ in Theilen des Halbmessers 1 ausgedrückt sind, so wird

23. $\vartheta = \sin. \vartheta + u = \frac{l}{f + c} + u$ (Nr. 18.)
und daher

24. $W = \frac{1}{2} (f + c) l + \frac{1}{2} (f + c)^2 u - 2 fl$
$= \frac{1}{2} cl + (f + c)^2 \frac{1}{2} u$, mithin

25.

25. $2\beta W = \beta\, cl + (f+c)^2\, \beta u$

$2fW. = fcl + (f+c)^2\, fu$, alſo

$2\beta W - 2fW = \beta\, cl - fcl + (\beta - f)(f+c)^2 u$

26. Ferner $fcl = \left(\frac{l^2}{2c} - \frac{1}{2}c\right) cl$ (Nr. 12.)

$= \frac{1}{2} l^3 - \frac{1}{2} c^2 l$, mithin

$2\beta W - 2fW = \beta cl - \frac{1}{2} l^3 + \frac{1}{2} c^2 l + (\beta - f)(f+c)^2 u.$

Setzt man letztere Werthe in die Gleichung Nr. 17. ſo wird

27. $\frac{1}{2}$ Dol. $= \pi\ (\beta^2 l + \frac{2}{3} l^3 + \beta cl - \frac{1}{2} l^3 + \frac{1}{2} c^2 l + (\beta - f)(f+c)^2 u)$

$= \pi\ (\beta^2 l + \frac{1}{6} l^3 + \beta cl + \frac{1}{2} c^2 l + (\beta - f)(f+c)^2 u)$

$= \pi\ [l(\beta^2 + \frac{1}{6} l^3 + \beta c + \frac{1}{2} c^2) + (\beta - f)(f+c)^2 u]$

28. Nun iſt $\beta = b - c$ (Nr. 3.) mithin

$\frac{1}{2}$ Dol. $= \pi\ [l\,(b^2 - 2bc + c^2 + \frac{1}{6} l^2 + bc - c^2 + \frac{1}{2} c^2) + (\beta - f)(f+c)^2 u]$

$= \pi\ [l(b^2 - bc + \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{6} l^2) + (\beta - f)(f+c)^2 u]$ alſo

29. Dol. $= 2\pi\ [l\,(\beta^2 + \frac{1}{6} l^2 + \beta\, c + \frac{1}{2} c^2) + (\beta - f)(f+c)^2 u]$ oder

$= 2\pi\ [l(b^2 - bc + \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{6} l^2) + (\beta - f)(f+c)^2 u]$

I. Zusatz: Für $f > \beta$ ist

$$\text{Dol.} = 2\pi \left[l \left(b^2 - bc + \tfrac{1}{2} c^2 + \tfrac{1}{6} l^2 \right) - (f - \beta)(f + c)^2 u \right]$$

II. Zusatz: Wenn die Faßböden ungleich sind, so muß die andere Hälfte des Faßes, oder ECDF besonders aus Nr. 27 oder 28 berechnet, und $\beta = CI$ gesetzt werden.

§. 336.

Beyspiel zur vorhergehenden Aufgabe: (Fig. 103.)

Aus der Faßlänge $AC = GI = 43$, der Spundtiefe $EF = 30$, und den Diametern $AB = CD = 24$, wo die Zahlen baierische Decimalzoll bezeichnen, den körperlichen Inhalt des Faßes zu suchen.

Auflösung:

Da sich die ganze Auflösung auf den vorhergehenden §. bezieht, so wird in Bezeichnung der Nr., um die einzelnen Citaten zu vereinfachen, fortgefahren.

30. Im gegenwärtigen Falle ist nach Nr. 3.

$b = 15$; $\beta = 12$; $c = 3$; $l = 21,5$. mithin

§. nach I. Zus.

31. $b^2 = 225$

$\frac{1}{2} c^2 = 4,5$

$\frac{1}{6} l^2 = 77,0416$

306,5416

$-bc = 45$

261,5416

$l = 21,5$

13077080

2615416

5230832

$l(b^2 - bc + \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{6}l^2) = 5623,14440$

32. $\frac{l^2 + c^2}{2c} = r = f + c$ (Nr. 9.)

$= \frac{462,25 + 9}{6} = 78,5416.$

33. Ferner log. $l = 1,3324385$

log. $f + c = 1,8950998$ mithin (Nr. 18)

log. sin. $\vartheta = 9,4373387$ (§. 8. IV. Zus.).

$=$ sin $15° 53'$

34. Nun ist für den Halbmesser 1

arc. $15° = 0,2617994$

arc. $53' = 0,0154171$ mithin

$\vartheta = 0,2772165$

sin. $\vartheta = 0,2736794$, folglich Nr. 22.

$u = 0,0035371$

35. $f = r - c$ (Nr. 4.) $= 75{,}5416$ (Nr. 32.)
mithin ist
$f > \beta$; und $f - \beta = 63{,}5416$.

36. Ferner ist:

$\log. (f + c) = 1{,}8950998$
$2 = 2$
$\log. (f + c)^2 = 3{,}7901996$
$\log. (f - \beta) = 1{,}8030581$
$\log. u = 4{,}5486473 - 7$
(§. 246. Arithm.)
$\log. (f - \beta)(f + c)^2 u = 3{,}1419050$
$= \log. 1386{,}5$

37. Nun ziehe man diese Zahl von obiger Nr. 31. ab, oder
$5623{,}1444 - 1386{,}5 = 4236{,}6444$.

38. Endlich ist $\log. 4236{,}65 = 3{,}6270226$
$\log. \pi = 0{,}4971499$
$\log. 2 = 0{,}3010300$

folglich I. Zuf. $\log.$ Dol. $= 4{,}4252025$, mithin

39. Dol. $= 26620$ baierische Decimalcubikzoll, und hält 10 Eymer 19 Maß.

Anmerkung: Diese eben angeführte Berechnung des Faßes als eines Kreissphäroides ist so mühsam, und entspricht der Erfahrung, wie ich aus den später §. 342 angeführten Versuchen schließe, nicht genauer, als andere leichtere Berechnungen; mithin ist sie in der Ausübung nicht brauchbar.

III. Hauptstück.

Von höhern algebraischen und transcendenten Linien

Vorerinnerung:

Von höhern algebraischen und transcendenten Linien hob ich nur jene, und von diesen nur jene Lehren aus, die mir die brauchbarsten schienen.

I. Abschnitt.

Von der Cissoid und Conchoid.

§. 337.

Erklärung: (Fig. 104.)

Wenn man durch den einen Endespunct B des Kreises-Durchmessers AB auf ihm einen Perpendikel BF errichtet, und vom andern Endespunct A nach BF die beliebigen geraden Linien AD, Ad u. s. f. zieht, und auf solchen immer AM = DE, Am = de u. s. f. nimmt, so heißt die Linie AmM, in welcher alle diese Puncte liegen die Cissoid des Diocles (κισσος, Epheu, ihrer Form wegen).

Anmerkung: Diocles ein griechischer Geometer erfand diese Linie, um zwischen zwey gegebenen Größen die zwey mittlern stättigen geometrischen Proportionalgrößen zu suchen.

§. 338.

Lehrsatz: (Fig. 104).

Wenn man den Diameter AB = a zur Abscissenlinie, und A als ihren Anfangspunct nimmt, dann für den beliebigen Punct M die rechtwinklichte Ordinate PM = y zieht, die Abscisse AP = x setzt, so ist für die Cissoid:

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}$$

Beweis:

1. PM ∦ BD (per constr.), mithin
   AP : AB = PM : BD (§. 83. Geom.) oder
   x : a = y : BD, also

2. $BD = \frac{a\,y}{x}$

3. Eben so ist AP : AB = AM : AD, oder
   x : a = AM : AD, also

4. $AD = \frac{a.\,AM}{x}$

5. Ferner DE = AM (§. 337), und

6. BD^2 = DE. AD (§. 105. Geom.) = AM. AD, mithin aus Nr. 2 und 4 die Werthe gesetzt, ist

7.

7. $\frac{a^2 y^2}{x^2} = AM. \frac{a.AM}{x} = \frac{a.AM^2}{x}$

8. Nun ist $AM^2 = AP^2 + PM^2 = x^2 + y^2$, folglich

9. $\frac{a^2 y^2}{x^2} = \frac{a(x^2+y^2)}{x}$, also

$\frac{ay^2}{x} = x^2 + y^2$, $ay^2 = x^3 + xy^2$

$y^2 (a - x) = x^3$, folglich

$y^2 = \frac{x^3}{a-x}$

I. Zusatz: Die Cissoid ist eine Linie der dritten Ordnung (§. 235).

II. Zusatz: $y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$, das heißt, jeder Abscisse AP entsprechen 2 gleiche einander entgegengesetzte Ordinaten PM, PM', folglich theilt die Abscissenlinie die Cissoid in zwey einander congruente Theile AM, AM'

III. Zusatz: Für $x = o$ ist auch $y = o$, mithin ist A der Scheitel der Cissoid, und die Abscisse AP berührt im Scheitel die beyden Aeste der Cissoid.

IV. Zusatz: Für $x = a$ wird $y = \pm \sqrt{\frac{a^3}{o}} = \infty$;

und für $x > a$ ist y eine unmögliche Größe, das ist, jenseits der Linie BF giebt es keine Ordinaten, und BF wird von keinem Aste der Cissoid durchschnitten.

V. Zusatz: So wie die Abscisse AP = x wächst, nimmt GM = BP = a — x, oder die Entfernung der Cissoid von der Linie BF ab, die Cissoid nähert sich also derselben immer, ohne sie zu durchschneiden (IV. Zus.), folglich ist BF eine Asymptote der Cissoid (§. 265.).

§. 339.

Erklärung: (Fig 105.)

Wenn man durch einen beliebigen Punct B der geraden Linie AC einen Perpendikel DE errichtet, von C aus die geraden Linien CM, Cm u. s. f. zieht, und auf letztern FM = fm u. s. f. = BA nimmt, so heißt die Linie AmM eine **Conchoid** oder **Muschellinie.**

Anmerkung: Nikomedes ein griechischer Geometer, der ohngefähr im zweyten Jahrhundert vor Christi Geburt lebte, erfand diese Linie, um durch ihre Hilfe zwischen zwey gegebenen Größen zwey stetige geometrische Proportionalgrößen zu finden.

§. 340.

Lehrsatz: (Fig. 105.)

Wenn man AB = a, BC = b, die rechtwinklichten Coordinaten BP = x, MP = y setzt, so ist für die Conchoid:

$$y^4 + 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2)y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0$$

Be-

Beweis:

1. Man ziehe durch M auf AC den Perpendikel MG, so ist $MG = BP = x$; und
$BG = PM = y$.

2. Ferner $FP = \sqrt{(FM^2 - MP^2)} = \sqrt{(AB^2 - MP^2)}$ (§. 339.)
$= \sqrt{(a^2 - y^2)}$, mithin

3. $BF = BP - FP = x - \sqrt{(a^2 - y^2)}$.

4. BP ∦ GM, mithin
$BC : BF = CG : GM$, oder
$b : x - \sqrt{(a^2 - y^2)} = b + y : x$ (Nr. 1)
mithin
$bx = bx + xy - (b + y)\sqrt{(a^2 - y^2)}$, also

5. $xy = (b + y)\sqrt{(a^2 - y^2)}$
$x^2y^2 = (b^2 + 2by + y^2)(a^2 - y^2)$
$= a^2b^2 + 2a^2by + a^2y^2 - b^2y^2 - 2by^3$
$- y^4$, folglich

6. $y^4 + 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2)y^2 - 2a^2by$
$- a^2b^2 = 0$

I. Zusatz: Die Conchoid ist eine Linie der vierten Ordnung (§. 235.).

II. Zusatz. Nimmt man x negativ, oder die Abscissen von B gegen D zu, so entsprechen allemal gleiche Ordinaten, mithin theilet AC die Muschellinie in zwey congruente Theile.

III. Zusatz: $x^2 = \frac{a^2 b^2}{y^2} + \frac{2 a^2 b}{y} + a^2 - b^2 - 2by - y^2$; wenn also $y = o$ werden soll, so muß $x = \infty$ werden, das heißt, die Chonchoid stoßt mit der geraden Linie DE nie zusammen.

IV. Zusatz: Je kleiner daher y wird, desto größer muß x seyn, folglich wenn die Abscisse zunimmt, so nähert sich die Conchoid der Linie DE, folglich ist letztere ihre Asymptote (§. 265.).

V. Zusatz: Für $y = a$ wird

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2} + \frac{2 a^2 b}{a} + a^2 - b^2 - 2ab - a^2 = o;$$

mithin auch $x = o$.

VI. Zusatz: Da $xy = (b+y)\sqrt{(a^2 - y^2)}$ (Nr. 4.) so ist

$$x = \frac{(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}}{y}, \text{ ferner}$$

$$\sqrt{(a^2 - y^2)} = \frac{xy}{b+y}, \text{ und}$$

$$b + y = \frac{xy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$$

§. 341.

Aufgabe: (Fig. 105.)

Das Sphäroid zu cubiren, welches durch den Bogen AM der Conchoid begränzt wird, wenn sich solcher um die Asymptote, oder Abscissenlinie DE dreht.

Auf-

Auflösung:

1. $x = \frac{(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}}{y}$ (§. 340. VI. Zuſ.)

$= \left(\frac{b}{y}+1\right)\sqrt{(a^2-y^2)}$, alſo

2. $dx = -by^{-2}\,dy\,(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$

$-\left(\frac{b}{y}+1\right)(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,ydy$

$= -\left(\frac{b\,(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{y^2}+\frac{b+y}{(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}\right)dy$

$= -\frac{b\,(a^2-y^2)+y^2\,(b+y)}{y^2\,(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}\,dy$

$= -\frac{a^2\,b+y^3}{y^2\,(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}\,dy$, mithin

3. $K = \int \pi\,y^2\,dx$ (§. 270.) $= \int -\frac{\pi\,(a^2\,b+y^3)}{(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}\,dy$

$= -\int \frac{a^2\,b\pi\,dy}{(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{\pi y^3\,dy}{(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} + C.$

4. Nun iſt $\int \frac{a^2\,b\pi\,dy}{(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} = a^2\,b\pi$ arc. ſin. $\frac{y}{a}$

(§. 252. Tab. VI. Nr. 18.)

5. Da ferner im Differential $\pi y^3\,dy\,(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$

der um 1 vermehrte Exponent der veränderli-

chen Größe auſſer dem Binomio, durch den Exponenten eben dieſer veränderlichen Größe im Binomio dividirt, eine poſitive ganze Zahl, nemlich $\frac{3+1}{2} = 2$, zum Quotienten giebt, ſo läßt ſich dieſes Differential aus §. 331 Arithm. integriren.

6. Setzt man nemlich $a^2 - y^2 = Z$; ſtatt n, m, p, b und g aber ihre Werthe, ſo iſt

7. $\pi y^3 dy (a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \pi Z^{-\frac{1}{2}} dZ (Z - a)$
$= \frac{1}{2} \pi Z^{\frac{1}{2}} dZ - \frac{1}{2} a \pi Z^{-\frac{1}{2}} dZ$, mithin

8. $\int \pi y^3 dy (a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \pi Z^{\frac{3}{2}} - a \pi Z^{\frac{1}{2}}$
$= \pi Z^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{3} Z - a)$

9. Subſtituirt man aus Nr. 6. für Z deſſen Werth, und ſtatt a im gegenwärtigen Falle den erſten Theil des Binomiums a^2, ſo wird

10. $\int \pi y^3 dy (a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \pi \sqrt{(a^2 - y^2)} (\frac{1}{3} a^2 - \frac{1}{3} y^2 - a^2)$
$= \pi \sqrt{(a^2 - y^2)} \times -\frac{1}{3} (2a^2 + y^2)$
$= -\frac{1}{3} \pi (2a^2 + y^2) \sqrt{(a^2 - y^2)}$.

11. Setzt man dieſen Werth, und jenen Nr. 4 in die Gleichung Nr. 3, ſo wird

12. $K = -a^2 b \pi . \text{arc. sin.} \frac{y}{a}$
$+ \frac{1}{3} \pi (2a^2 + y^2) \sqrt{(a^2 - y^2)} + C$

13.

13. Für $y = a$, mithin für $x = o$ (§. 340. V. Zuſ.) iſt auch $K = o$, mithin

14. $o = -a^2 b \pi$ arc. ſin. $1 + C$, alſo

$C = a^2 b \pi$ arc. ſin. 1.

15. Der Bogen aber für einen Sinus, welcher dem Halbmeſſer 1 gleich iſt, iſt ein Quadrant, und deſſen Länge $= \frac{1}{2} \pi$, wenn π die Peripherie für den Durchmeſſer 1 ausdrückt; mithin

$C = a^2 b \pi . \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} a^2 b \pi^2$, folglich

16. $K = a^2 b\pi \left(\frac{1}{2} \pi - \text{arc. ſin. } \frac{y}{a}\right)$

$+ \frac{1}{3} \pi (2a^2 + y^2) \sqrt{(a^2 - y^2)}$

17. Zieht man endlich vom Quadranten den Bogen vom ſin. $\frac{y}{a}$ ab, ſo iſt der Reſt dem Complementsbogen, oder dem Bogen vom cos. $\frac{y}{a}$ gleich, oder $\frac{1}{2} \pi -$ arc. ſin. $\frac{y}{a} =$ arc. cos. $\frac{y}{a}$ folglich

18. $K = a^2 b\pi$ arc. cos. $\frac{y}{a}$

$+ \frac{1}{3} \pi (2a^2 + y^2) \sqrt{(a^2 - y^2)}$

$= a^2 b \pi$ arc. cos. $\frac{y}{a} + \frac{\pi (2a^2 + y^2) xy}{3 (b + y)}$

(§. 340. VI. Zuſ.).

§. 342.

Aufgabe: (Fig. 103)

Aus der Länge AC = 43; Spundtiefe EF = 30, und dem Diameter der Böden AB = CD = 24 baier. Decimalzoll, den körperlichen Inhalt des Faßes zu suchen, wenn man solches als ein Sphäroid nimmt, welches die Daube AEC als Conchoid beschreibt, indem sie sich um GI dreht.

Auflösung:

1. $K = \frac{1}{2}\,\text{Dol.} = a^2 b\pi\ \text{arc. cos.}\ \frac{y}{a} + \frac{\pi\,(2a^2 + y^2)\,xy}{3\,(b + y)}$

2. Nun ist in der gegenwärtigen Aufgabe:

$x = \frac{1}{2}\,GI = \frac{1}{2}\,AC = 21{,}5$; $y = \frac{1}{2}\,AB = 12$;

$a = \frac{1}{2}\,EF = 15$, mithin

3. $b + y = \frac{xy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ (§. 340. VI. Zus.)

$= \frac{258}{6} = 28{,}667$,

und also $b = 16{,}667$,

4. Ferner arc. cos. $\frac{y}{a}$ = arc. cos. $\frac{12}{15}$

= arc. cos. 0,8000000

= arc. 36° 52′ 12″.

5.

5. Für den Halbmesser 1 ist aber:

arc. 36° = 0,6283185

arc. 52′ = 0,0151262

arc. 12″ = 0,0000582, mithin

$\text{arc. cos. } \frac{y}{a} = 0{,}6435029$

6. $\log. a^2 = 2{,}3521825$

$\log. b = 1{,}2218574$

$\log. \pi = 0{,}4971499$

$\log. \text{arc. cos. } \frac{y}{a} = 6{,}8085504 - 7$

3,8797402, folglich

7. $a^2 b \pi \text{ arc. cos. } \frac{y}{a} = 7581{,}2$

8. Ferner $\log. \pi = 0{,}4971499$

$\log. (2a^2 + y^2) = 2{,}7737864$

$\log. xy = 2{,}4116197$

$\text{c. dec. log. } 3 = 9{,}5228787 - 10$

$\text{c. dec. l. } (b + y) = 8{,}5426178 - 10$

3,7480525, mithin

9. $\frac{\pi (2a^2 + y^2)\, xy}{3 (b + y)} = 5598{,}3.$

10. Setzt man endlich die Werthe aus Nr. 7 und 9 in die Gleichung Nr. 1, so wird

11. $\frac{1}{2}$ Dol. = 7581,2 + 5598,3 = 13179,5, Dec. Cubiczoll, mithin das ganze Faß hält 26359 baier. Dec. Cubiczoll.

12. Da endlich die baier. Maaß 43 und der Eymer a 60 Maß 2580 Dec. Cubikzoll hält, so ist der Inhalt des Faßes 10 Eymer 13 Maß.

I. Anmerkung: Martin Müller, Ingenieur, Landmesser und Visirer zu Grönningen, giebt in seinem Versuche den Inhalt der Fäßer durch Anwendung der Muschellinie zu finden. Aus dem Holländischen. Leipzig bey Hilscher 1784. eine sehr weitläufige Formel an, die zugleich den wesentlichen Fehler hat, daß b = a gesetzt wird, da doch $b = \frac{xy}{\sqrt{a^2 - y^2}} - y$ (§. 340. VI. Zus.), mithin durch die Länge die Spund- und Bodentiefe vollkommen bestimmt ist. Oberreit gab dafür im I. Stücke 1787 Jahrgange des Leipziger Magazins eine andere Formel an, die, nebst ihrer Weitläufigkeit, doch noch unvollständig ist.

II. Anmerkung: Die am Ende beygefügten Tabellen VII. und VIII. enthalten die Berechnungen einiger baierischen Fäßer zur Vergleichung. Die Data zu den ersten 3 Fäßern erhielt ich durch Kollega Socher vom churfürstl. weißen Bräuhause in Kelheim; diese sind vom Fichten- und Tannenholz, und mit Birken- und Haselnußreifen abgebunden. Die übrigen 5 Fäßer Nr. V. — VIII.

die

die von Eichenholz mit eisernen Reifen abgebunden sind, gehören zum Graf Seinsheimischen braunen Bräuhause in Grünbach, dessen thätiger Verwalter Hr. Scharl mir die Data zuschickte. Das Längenmaaß ist der baierische Fuß in Duodecimalzoll getheilt, welche ich auf Decimalzolle reducirte; der Eymer ist zu 60 Maß, und die Maß zu 43 baierischen Decimal-Cubikzoll gerechnet. Da endlich die Faßböden an ihrer innern Seite eine erhabene Wölbung haben, so wurde die Länge des Faßes zweymal, in der Mitte des Bodens, und nahe an den Dauben gemessen, die erstere oder kleinere Länge steht allemal voran; für die wahre Faßlänge nahm ich aus beyden ihr arithmetisches Mittel.

II. Abschnitt.

Von der Quadratrix und Schneckenlinie.

§. 343.

Erklärung: (Fig. 106.)

Wenn man den Quadranten AB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile AD = DE = EF u. s. f. theilet, und die Radien CD, CE u. s. f. zieht; ferner den Radius in eben so viele einander gleiche Theile AP'' = P''P' = P'P = PC theilt, durch P'' auf AC einen Perpendikel errichtet, welcher den ersten Radius CD in M'' schneidet, und eben bey allen folgens

genden Theilungspuncten die Perpendikel P'M', PM auf ähnliche Art zieht, so heißt die Linie AM''M'MN, in welcher die Durchschnittspuncte liegen, die Quadratrix des Dinostrates.

Anmerkung: Dinostrates ein griechischer Mathematiker wird für den Erfinder dieser Linie gehalten

§. 344.

Lehrsatz: (Fig. 106.)

Wenn man den Halbmesser des Kreises CA = CB = r, den Quadranten AB = $\frac{1}{4}$ p, ferner den Bogen BF = x, und den entsprechenden Theil CP des Radius = y setzt, so ist für jeden Punct M der Quadratrix:

$$y = \frac{r\,x}{\frac{1}{4}\,p}$$

Beweis:

CP : CA = BF : BA (§. 343.), oder

y : r = x : $\frac{1}{4}$ p; mithin

$$y = \frac{r\,x}{\frac{1}{4}\,p}$$

I. Zusatz: Wenn π die Peripherie des Kreises für den Durchmesser 1 bezeichnet, so ist p = 2rπ (§. 128. Geom.), mithin

$y = \frac{rx}{\frac{1}{2}.\,r\pi} = \frac{x}{\frac{1}{2}\,\pi}$ ein anderer Ausdruck der Gleichung für die Quadratrix.

II.

II. Zusatz: Setzt man x negativ, so wird auch y negativ, das ist, wenn man den Quadranten zu einem Halbkreise, und den Radius AC zum Diameter verlängert, so erhält man im untern Quadranten eine der vorigen Congruente aber entgegengesetzte Quadratrix.

III. Zusatz: Die Quadratrix, da ihre Gleichung die Rectification des Kreises voraussetzt, ist eine transcendente Linie.

IV. Zusatz: Die Linien P''M'', P'M', PM lassen sich zwar geometrisch construiren, aber nicht durch Rechnung bestimmen.

§. 345.

Lehrsatz: (Fig. 106.)

Wenn man wieder $CA = r$; $AB = \frac{1}{4}p$; und $CN = a$ setzt, so ist

$a : r : \frac{1}{4}p$.

Beweis:

1. Man stelle sich den Radius CA sowohl, als den Quadranten BA in m gleiche Theile getheilt vor, so daß

2. $Cc = \frac{r}{m}$ AC; und $Bb = \frac{r}{m}$ BA, mithin für jeden beliebigen Werth von m allemal

Cc : AC = Bb : AB ist (§. 210. Arithm.)

3. Durch c sey auf AC ein Perpendikel errichtet, welcher mit dem Radius Cb in n zusammenstosset, so ist n ein Punct der Quadratrix (§. 343).

4. Da man nun m so groß, folglich Cc und Bb so klein annehmen kann, als man will, so sind beyde unendlich kleine Größen, und Bb läßt sich als ein Stück der Tangens, so wie das Dreyeck CBb als ein geradlinigtes nehmen, und die daraus abgeleiteten Verhältniße und Gleichungen sind keine falsche, sondern wenigstens unvollständige Verhältniße und Gleichungen (§. 233. VII. Zus. und §. 301. I. Zus. Arithm.).

5. In den beyden Dreyecken Ccn und CBb ist aber der Winkel $Ccn = CBb = 90°$, $Cnc = BCb$ (§. 45. III. Geom.), mithin
$\triangle Ccn \backsim \triangle CBb$, und also

6. $Cc : Cn = bB : Cb$.

7. Nun ist $Cb = CB$, und da ferner n dem Punct N unendlich nahe liegt, so ist Cn von CN unendlich wenig unterschieden, und wenn man in vorhergehender Proportion CN statt Cn setzt, so bleibt die Proportion noch wenigstens eine unvollständige (§. 299. Arithm.), mithin

8. $Cc : CN = Bb : CB$
$Cc : CA = Bb : AB$ (Nr. 2.), folglich

$CN : CA = CB : AB$ (§. 218. II. Arithm.), also

9. $a : r = r : \frac{1}{4} p$

10.

10. Da endlich aus letzterer Proportion alle Hilfsgrößen entfernt sind, so ist sie eine wahre vollständige Proportion (§. 301. Arithm.).

I. Zusatz: $\frac{1}{4} p = \frac{r^2}{a}$, wenn also a und r gegeben sind, so ist $\frac{1}{4} p$ vollkommen bestimmt, mithin der Kreis quadrirt, daher erhielt die Quadratrix ihren Namen.

II. Zusatz: Da man aber a erst vermittels des Kreises finden kann, so taugt sie zur Quadratur desselben nichts.

§. 346.

Erklärung: (Fig. 107.)

Wenn aus C mit dem Halbmesser CA ein Kreis beschrieben, und eine andere Linie CMmAM'm' so beschaffen ist, daß für jeden beliebigen Punct M derselben, wenn man durch ihn den Halbmesser CP zieht, allemal 360°: ACP = AC : CM, so heißt diese Linie CMmAM'm' die **archimedische Schnecken- oder Spirallinie** (helix, spiralis).

Anmerkung: Archimed hat ein eigenes Buch über diese Linie verfaßt.

§. 347.

Lehrsatz: (Fig. 107.)

Wenn man den Halbmesser CA = r, die Peripherie des Kreises für diesen Halbmesser = p;

ferner den Bogen AP = x, und die gerade Linie CM = y setzt, so ist für die Spirallinie:

$$y = \frac{rx}{p}$$

Beweis:

1. 360° : ACP = AC : CM (§. 346.), ferner 360° : ACP = p : arc. AP (§. 65. I. Zus. Geom.), mithin

2. p : arc. AP = AC : CM, oder p : x = r : y, folglich

$$3.\ y = \frac{rx}{p}$$

I. Zusatz: Die archimedische Spirallinie ist eine transcendente Linie; denn sie setzt die Rectification des Kreises voraus.

II. Zusatz: Für x = o ist auch y = o, und mit x wächst y so, daß wenn $x = \frac{1}{2} p$ ist, $y = \frac{1}{2} r$ wird, für x = p, ist y = r; für x > p wird auch y > r; folglich geht die archimedische Spirallinie vom Mittelpunct C des Kreises aus, und entfernet sich von solchem immer weiter.

Anmerkung: Bey der Quadratrix sowohl als bey der Schneckenlinie sind die Coordinaten x, y ganz anderer Art, als bey den vorhergehenden krummen Linien.

III. Abschnitt.

Von der Cycloide oder Radlinie.

§. 348.

Erklärug: (Fig. 108.)

Wenn sich ein Kreis, welcher die gerade Linie DE in D berührt, in der Ebene DγE auf der geraden Linie DE rollend bewegt, so heißt die krumme Linie, welche ein Punct am Umfange des Kreises beschreibt, eine **Cycloide oder Radlinie** (cyclois).

I. Zusatz: Wenn sich der Kreis einmal um seinen Mittelpunct gedreht hat, so beschreibt der Punct D die ganze Cycloide DMAE, und der vom Kreise hinterlegte Weg DE ist der Peripherie des Kreises gleich.

II. Zusatz: Wenn sich der Kreis auf DE in N befindet, und man nimmt auf solchem den Bogen NM = ND, so ist M zugleich ein Punct der Cycloide.

III. Zusatz: Ist der Kreis bis in die Mitte der Linie DE, bis B gerückt, so ist BD = BE = der halben Peripherie des Kreises, zieht man den Diameter BA, so steht solcher auf DE senkrecht (§. 76. I. Zus. Geom.), theilt die Cycloide in zwey congruente Theile, so wie solcher alle zu DE parallel gezogene Sehnen der Cycloide halbiret.

§. 349.

Erklärungen: (Fig. 108.)

Für die Cycloide DAE heißt

a) Der Punct des Kreises, welcher die gerade Linie DE im Anfange bey D berührt, der **beschreibende Punct** (punctum describens).

b) der Kreis AQBR der **erzeugende Kreis** (circulus generator).

c) der durch B gezogene Diameter AB die **Axe** (§. 255.).

d) der Punct A der **Scheitel**, und endlich

e) die gerade Linie DE die **Basis** oder **Grundlinie** der Cycloide.

Zusatz: Wenn die Grundlinie DE keine gerade, sondern selbst eine Kreislinie ist, so verzeichnet der beschreibende Punct

a) die **Epicycloide**, wenn sich der erzeugende Kreis auf der äussern oder convexen Seite der Basis fortwälzt,

b) die **Hypocycloide**, wenn die Fortwälzung desselben auf der innern, oder hohlen Seite der Basis geschieht.

§. 350.

Lehrsatz: (Fig. 108.)

Wenn man für den beliebigen Punct M der Cycloide die Linie MP zu DE parallel, also auf AB senkrecht

recht zieht, und AP = x; PM = y; MQ = w und den Kreisbogen AQ = v setzt, so ist für den Radius AC = r

I. $w = v$

II. $y = v + \sqrt{(2rx - x^2)}$.

Beweis:

1. Man ziehe die beyden Sehnen BQ, NM, so ist
BP = NS (§. 45. V. Zus. Geom.)
PQ = $\sqrt{(2rx - x^2)}$ (§. 101. Geom.)
= SM, mithin
$\triangle BPQ \overset{S}{=} \triangle NSM$, folglich
BQ $\overset{\#}{=}$ NM, mithin auch

2. arc. BQ = arc. NM (§. 64. II. Zus. Geom.)
= ND (§. 348. II. Zus.)

3. Ferner arc. BQA = BD, also
arc. BQA — arc. BQ = BD — ND,
oder
arc. AQ = BN = MQ (§. 45. IV. Zus.),
folglich

4. $v = w$ Nr. I.

5. Endlich ist PM = PQ + QM
= PQ + BN
= $\sqrt{(2rx - x^2)}$ + arc. AQ (Nr. 3.),
folglich

6. $y = v + \sqrt{(2rx - x^2)}$ Nr. 2.

Zu-

Zusatz: Da die Cycloide die Rectification des Kreisbogens v voraus setzt, so ist sie eine transcendente Linie.

§. 351.

Aufgabe: (Fig. 108.)

Für den beliebigen Punct M der Cycloide die Subtangens PT zu bestimmen.

Auflösung:

1. Für jede krumme Linie mit rechtwinklichten Coordinaten ist allgemein $PT = \frac{ydx}{dy}$ (§. 257.).

2. Nun ist in der Cycloide

$$y = v + \sqrt{(2rx - x^2)}, \text{ mithin}$$

3. $$dy = dv + \tfrac{1}{2}(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2rdx - 2xdx)$$
$$= dv + \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}\, dx$$

4. Ferner $dv = \sqrt{(dx^2 + du^2)}$ (§. 267.), wenn man $PQ = u$ setzt.

5. $u = \sqrt{(2rx - x^2)}$, also
$$du = \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}\, dx, \text{ und}$$
$$du^2 = \frac{(r - x)^2}{2rx - x^2}\, dx^2, \text{ mithin Nr. 4. sub,}$$

stituirt, giebt

6.

6. $dv = \sqrt{(dx^2 + \frac{(r-x)^2}{2rx-x^2} dx^2)}$

$= \sqrt{\left(\frac{2rx-x^2+r^2-2rx+x^2}{2rx-x^2} dx^2\right)}$

$= \frac{r}{\sqrt{(2rx-x^2)}} dx.$

7. Setzt man diesen Werth Nr. 3, so wird

8. $dy = \frac{2r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}} dx = \frac{2r-x}{\sqrt{x}\sqrt{(2r-x)}} dx$

$= x^{-\frac{1}{2}}(2r-x)^{\frac{1}{2}} dx$, folglich

9. $\frac{ydx}{dy} = PT = \frac{ydx}{x^{-\frac{1}{2}}(2r-x)^{\frac{1}{2}}dx}$

$= \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{(2r-x)}} = \frac{xy}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$

I. Zusatz: In der Cycloide ist für jeden Punct M:

$\sqrt{(2rx-x^2)} : x = y : PT$, oder

$PQ : PA = PM : PT$, folglich ist

die Tangens MT zur Sehne AQ parallel (§. 84. Geom)

II. Zusatz: Wenn man also für einen gegebenen Punct M der Cycloide, MP auf AB senkrecht, ferner die Sehne QA, und mit dieser durch M eine Parallele zieht, bis solche mit der verlängerten Axe in T zusammenstoßt, so ist MT die Tangens für den gegebenen Punct M der Cycloide.

III. Zusatz: Zieht man ferner die Sehne QB, und mit ihr durch M eine Parallele MN, verlängert diese sowohl, als die Axe AB, bis sie zusammenstossen, so ist die bis an die Axe verlängerte Linie MN die Normal für den Punct M der Cycloide. Denn NMT = BQA (per constr.) = 90° (§. 72. III. Zus. Geom.), mithin ist die bis an die Axe gezogene Linie MN die Normallinie (§. 256. b).

IV. Zusatz: Für $x = 2r = AB$, ist $PT = \frac{2ry}{0} = \infty$, folglich ist bey D die Tangens zur Axe BA parallel.

§. 352.

Aufgabe: (Fig. 108.)

Für den beliebigen Punct M der Cycloide ihren Krümmungshalbmesser zu suchen.

Auflösung:

1. Für jede krumme Linie mit rechtwinklichten Coordinaten ist

$$\text{rad. osc.} = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y} \text{ (§. 264. I. Zus.).}$$

2. Nun ist in der Cycloide nach §. 351. Nr. 8.

$$dy = \frac{(2r-x)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = x^{-\frac{1}{2}}(2r-x)^{\frac{1}{2}}\,dx,$$

mithin

3.

3. $dy^2 = \frac{2r - x}{x} dx^2$,

$$dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{2r - x}{x}\right) dx^2 = \frac{2r}{x} dx^2$$

also

4. $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{2r}{x}\right)^{\frac{3}{2}} dx^3 = (2rx^{-1})^{\frac{3}{2}} dx^3$

5. Ferner $d^2y = d\,(x^{-\frac{1}{2}} (2r - x)^{\frac{1}{2}}\, dx)$ (§. 313. IV. Zuſ. Arithm.).

$= d\,((2rx^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}\, dx)$

$= -\, rx^{-2}\, dx^2\, (2rx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, mithin

6. $dx\, d^2y = -\, rx^{-2}\, dx^3\, (2rx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

7. Setzt man dieſe Werthe aus Nr. 4 und 6 in die Gleichung Nr. 1, ſo wird

8. Rad. oſc. $= -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y}$

$$= -\frac{(2rx^{-1})^{\frac{3}{2}} dx^3}{-rx^{-2}\, dx^3\, (2rx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(2rx^{-1})^{\frac{3}{2}}}{rx^{-2}\, (2rx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}}$$

$= r^{-1} x^2 r^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \sqrt{8(2rx^{-1} - 1)}$

$= r^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} 2 \sqrt{2(2rx^{-1} - 1)}$

$= 2\sqrt{2rx\,(2rx^{-1} - 1)}$

=

$$= 2\sqrt{2r(2r-x)} = 2\sqrt{(4r^2-2rx)}$$

I. Zusatz: Für $x = o$, ist rad. osc. $= 2\sqrt{4r^2}$
$= 4r = 2AB$.

II. Zusatz: Für $x = 2r$ wird rad. osc. $= o$, das ist, man mag auch mit noch so einem kleinen Halbmesser einen Kreis beschreiben, so hat die Cycloide bey D doch eine kleinere Krümmuug.

III. Zusatz: Wenn man von M aus auf der Richtung MN (§. 351. III. Zus.) die doppelte Länge dieser Linie oder 2MN nimmt, so ist solche der Krümmungshalbmesser für den Punct M der Cycloide. Denn der Krümmungshalbmesser liegt in der Richtung von MN (§. 254. IV. Zus.); ferner ist

$BQ^2 = BP^2 + QP^2 = (2r-x)^2 + 2rx - x^2$
$= 4r^2 - 4rx + x^2 + 2rx - x^2 = 4r^2 - 2rx$,
mithin
$BQ = MN = \sqrt{(4r^2 - 2rx)}$ folglich
$2BQ = 2MN = 2\sqrt{(4r^2 - 2rx)} =$ rad. osc.

§. 353.

Aufgabe: (Fig. 108.)

Den beliebigen Bogen AM der Cycloide zu rectificiren.

Auflösung:

1. In jeder krummen Linie ist für rechtwinklichte Coordinaten: $Z = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 267).

2. Nun ist für die Cycloide aus §. 352. Nr. 3.

$$dx^2 + dy^2 = \frac{2r}{x} dx^2 = 2rx^{-1} dx^2, \text{ also}$$

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (2rx^{-1})^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{2r}$$

3. $Z = AM = 2\sqrt{2rx}$; wo $C = 0$ ist.

I. Zusatz: Zieht man die Sehne AQ, so ist

$AQ^2 = AP^2 + PQ^2 = x^2 + 2rx - x^2 = 2rx$;

mithin

$AQ = \sqrt{2rx}$; folglich $2AQ = 2\sqrt{2rx}$ = dem Bogen AM.

II. Zusatz: Die halbe Cycloide ist also dem doppelten, und die ganze dem vierfachen Diameter des erzeugenden Kreises gleich, oder

der Bogen $AD = 2AB$; und $DAE = 4AB$.

§. 354.

Aufgabe: (Fig. 108.)

Den zwischen den rechtwinklichten Coordinaten AP, PM und den Bogen AM enthaltenen Theil der Cycloide zu quadriren.

Auflösung:

1. Für rechtwinklichte Coordinaten ist allgemein:

$R = \int y dx$ (§. 268.).

2. Aus der Gleichung der Cycloide (§. 350 II.) ist nun

$$ydx = (v + (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}})\, dx$$

$$= dx\,(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} + vdx$$

3. Ferner ist $dv = rdx\,(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 351. N. 6.), mithin

4. $v = r.\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$ (§. 252. Tab. VI. Nr. 24.)

5. Man setze indessen $\text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r}) = q$,

folglich

$v = rq$, so ist

6. $\int ydx = \int dx\ (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} + \int r\,q\,dx$

7. $\int dx\ (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\,4\,r^2\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$

$- \frac{1}{8}\,(4r - 4x)\sqrt{(2rx - x^2)}$ (§. 252 Tab. VI. Nr. 28.)

$= \frac{1}{2}\,r^2\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$

$- \frac{1}{2}\,(r - x)\sqrt{(2rx - x^2)}$

8. Ferner setze man $\int rqdx = rqx + rt$, so ist

$rqdx = rqdx + rxdq + rdt$

$rdt = -rxdq.$

$dt = -xdq$

9. $dq = \frac{1}{r}\,dv$ (Nr. 5.) $= dx\,(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (Nr. 3.), also

10. $dt = -xdx\,(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= -\frac{xdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$= \frac{(r - x)\,dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} - \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$= (r - x)\,dx\,(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

11. Nun iſt $\int (r - x)\,dx\,(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{(2rx - x^2)}$ (§. 328. Arithm.)

12. $\int \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = r.\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$

(Nr. 4.), mithin

13. $t = \sqrt{(2rx - x^2)} - r.\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$;

dieſer Werth in der Gleichung N. 8. ſubſtituirt, giebt

14. $\int rqdx = rqx + r\sqrt{(2rx - x^2)} - r^2 \times$

$$\text{are. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$$

$$= rx\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r}) + r\sqrt{(2rx - x^2)}$$

$$- r^2\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$$ (Nr. 5.)

15. Setzt man endlich die Werthe Nr. 7 und 14. in die Gleichung Nr. 6., ſo iſt

16. $R = \int ydx = \frac{1}{2} r^2\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$

$$- \tfrac{1}{2}(r - x)\sqrt{(2rx - x^2)}$$

+

$$+ rx \text{ arc. cos. } (1 - \frac{x}{r})$$

$$+ r\sqrt{(2rx - x^2)} - r^2 \text{ arc. cos. } (1 - \frac{x}{r}) + C$$

$$= rx \text{ arc. cos. } (1 - \frac{x}{r})$$

$$- \tfrac{1}{2} r^2 \text{ arc. cos. } (1 - \frac{x}{r})$$

$$+ r\sqrt{(2rx - x^2)} - \tfrac{1}{2}(r - x)\sqrt{(2rx - x^2)}$$

$$= r(x - \tfrac{1}{2} r) \text{ arc. cos. } (1 - \frac{x}{r})$$

$$+ \tfrac{1}{2}(r + x)\sqrt{(2rx - x^2)} + C$$

17. Für $x = 0$ ist nun auch $R = 0$, mithin

$$0 = - \tfrac{1}{2} r^2 \text{ arc. cos. } 1 + C$$

da aber arc. cos. $1 = 0$ (§. 296. III. Zuf. Trig.), so ist auch $C = 0$.

I. Zusatz: Für $x = 2r$, wird die Fläche der halben Cycloide, oder

$$ADB = r(2r - \tfrac{1}{2} r) \text{ arc. cos. } (1 - \frac{2r}{r})$$

$$+ \tfrac{1}{2}(r + 2r)\sqrt{(4r^2 - 4r^2)}$$

$$= \tfrac{3}{2} r^2 \text{ arc. cos. } -1$$

Nun ist der Bogen, dessen Cosinus dem negativen Halbmesser gleich ist, der halben Peripherie gleich (§. 296 III. und IV. Zuf. Trigon.), die Hälfte aber der Peripherie vom Halbmesser 1 ist der ganzen vom Diameter 1 gleich, oder arc. cos. $-1 = \pi$, mithin $ADB = \tfrac{3}{2} r^2 \pi$, das ist, die

Flä-

Fläche der halben Cycloide ist drey Hälften vom erzeugenden Kreise, folglich die Fläche der ganzen Cycloide der dreyfachen Fläche des erzeugenden Kreises gleich.

II. Zusatz: Zieht man durch A und D zu BD, und AB die Parallelen AO, DO, so ist der von ihnen und der halben Cycloide begränzte Raum, oder

$AOD = \text{dem Rechtecke } BO - ABD$

$= BD.AB - ABD$

$= r\pi . 2r - \frac{3}{2} r^2 \pi = 2r^2 \pi - \frac{3}{2} r^2 \pi = \frac{1}{2} r^2 \pi$

also der Hälfte des erzeugenden Kreises gleich.

§. 355.

Erklärung: (Fig. 109.)

Wenn an die erhabene Seite der krummen Linie AFCB, welche immer nach der nemlichen Seite zu hohl bleibt, ein vollkommen biegsamer Faden gelegt, und nun so abgewickelt wird, daß allemal der abgewickelte Theil z. B. CD nach einer geraden Linie gespannt ist,

a) so heißt die krumme Linie BDEM, welche der Punct B bey der Abwicklung beschreibt, die durch die **Abwicklung erzeugte Linie** (genita ex evolutione) und

b) die Linie AFCB die **abgewickelte, oder Evolute** (evoluta).

I. Zusatz: Für jeden Punct D ist allemal die gerade Linie CD dem abgewickelten Bogen CB gleich, und berührt die abgewickelte Linie ACB in C.

II. Zusatz: Je kleiner DE ist, mithin je näher F dem Puncte C liegt, desto weniger ist FE von CD unterschieden, für den unendlich kleinen Bogen ED ist also CD der Krümmungshalbmesser und steht auf ihm senkrecht (§. 254.).

§. 356.

Lehrsatz: (Fig. 110.)

Wenn ACE eine aus der Abwicklung der halben Cycloide DMA erzeugte Linie, C ein beliebiger Punct derselben, und MC an dieser Stelle ihr Krümmungshalbmesser, mithin M der Punct ist, wo für den Punct C der ausgespannte Faden die Cycloide berührt, und wenn man ferner von M auf die Axe AB den Perpendikel MP, und die beyden Sehnen AQ, BQ zieht, endlich den Krümmungshalbmesser der Cycloide bey M = MK setzt, so ist

$$MC : MK = AQ : BQ$$

Beweis:

1. MC = arc. AM (§. 355. I. Zus.) = 2 AQ (§. 353. I. Zus.)
2. MK = 2 BQ (§. 352. III. Zus.), mithin
3. MC : MK = 2 AQ : 2 BQ = AQ : BQ.

I. Zusatz: Wenn C, folglich auch M, auf A fällt, so ist MC = 0, mithin hat die Linie ACE an

der

der Stelle A mit der halben Cycloide an der Stelle D einerley Krümmung (§. 352. II. Zus.).

II. Zusatz: Fällt C auf E, also M auf D, so ist DE = arc. AD = 2 AB, folglich ist die Krümmung bey E für die Linie ACE jener bey A der halben Cycloide gleich (§. 352 I. Zus.).

III. Zusatz: Da die Sehnen AQ, BQ in dem Halbkreise AQB ihrer Größe nach wechseln, so hat die aus der Abwicklung erzeugte Linie ACE mit der halben Cycloide gleiche Krümmung, aber in umgekehrter Ordnung.

IV. Zusatz: DE = 2 AB ist mit letzterer oder AB parallel. Denn DE berührt bey D die Cycloide, eine Tangens der Cycloide am Puncte D ist aber zur Axe AB parallel (§. 351. IV. Zus.).

V. Zusatz: Zieht man die Basis BD, so steht AB (§. 348. III. Zus.), mithin auch DE auf ihr senkrecht.

§. 357.

Lehrsatz: (Fig. 110.)

Die durch die Abwicklung der halben Cycloide AMD erzeugte Linie ACE ist umgekehrt ihrer Evolute congruent.

Beweis:

1. Man nehme DG = $\frac{1}{2}$ DE = AB, und
2. ziehe AG, so ist AG $\overline{\overline{\parallel}}$ BD (§. 51. VII. Zus. Geom.)

3.

3. Ferner sind B und G rechte Winkel (§. 356. V. Zus.).

4. Nun lege man die von AG, GE und dem Bogen ACE begränzte Fläche, auf die Ebene DAB der halben Cycloide so, daß

5. G auf B, und GA längst DB zu liegen kömmt, so decken die Linien GA, GE der ersten Ebene die Linien BD, BA der halben Cycloide.

6. Da nun jedem Puncte des Bogens ACE der der Ordnung nach der nemliche Krümmungshalbmesser entspricht, der zu jenen Puncten der Cycloide in verkehrter Ordnung gehört (§. 356. III. Zus.), so deckt

7. der Bogen ACE die halbe Cycloide DMA, folglich ist

8. ACEGA $\overline{\underline{\underline{=}}}$ DMABD.

Zusatz: Eben so ist die durch Abwicklung der halben Cycloide DF erzeugte Linie EF derselben in umgekehrter Ordnung congruent.

Anmerkung: Die Vergleichung zwischen der Evolute und der aus ihr durch Abwicklung erzeugten Linie läßt sich auf die nemliche Art auf andere krumme Linien fortsetzen, welches aber ausser der Sphäre des gegenwärtigen Lehrbuches liegt.

Verzeichniß der Druckfehler

von der I. Abtheilung des III. Theiles, oder Polygonometrie und Markscheidekunst.

Seite	Zeile	statt	lies
4	1	I. Zusatz:	II. Zusatz:
5	12	II. Zusatz:	I. Zusatz:
—	15	I. Zusatz:	II. Zusatz:
6	26	= sin. A	= a sin. A.
13	7	cos. (A + B)	— cos. (A + B)
—	18	e sin. (A	— e sin. (A
14	12	b. cos. (A + B)	— b cos. (A + B)
18	27	c sin. (E + E + D)	c sin. (F + E + D)
41	18	sin. (A + B + C)	sin. (A + D + C)
69	13	tang. β	tang. β =
109	12	CBD	BD
113	14	d^2 sin. D^2 — b^2 sin. C^2)	(d^2 sin. D^2 — b^2 sin. C^2)
116	2	+ ad sin. A	+ $\frac{1}{2}$ ad sin. A
120	2	d sin. d	d sin. D
121	8	$\frac{-a \sin.(C+D+A)}{C}$	$\frac{-a \sin.(C+D+A)}{\sin. C}$
161	19	Horitalebene	Horizontalebene
177	9	Mittagslinie	Magnetlinie
192	21	verborgen	verbogen

Seite	Zeile	statt	lies
214	16	22	2 a
266	12	log. (sin. $\frac{1}{2}$ B)	log. (sin. $\frac{1}{2}$ B)^2
—	13	log. sin. $\frac{1}{2}$ B^2	log. sin. $\frac{1}{2}$ B
267	17	$\alpha = 15$	$\alpha = 15^1$
268	7	cos. 0° 24′	cos. 1° 24′
299	7	Lehrsätze:	Lehnsätze:
320	13	F′	E′
321	25	Stolns	Ortes
325	1	Fig. 62.	Fig. 63.

Seite 328 Zeile 25 statt: so sind z. B. ... bis ans Ende, soll stehen: das ist, ein Theil liegt jener Seite zu, nach welcher der Gang zufällt, der andere Theil hingegen kömmt auf der entgegengesetzten Seite zu liegen, so liegen z. B. die Puncte N, P auf der Seite des Hangenden, oder wie man auch sagt, im Hangenden des Ganges, weil das Saalband Ab, mithin auch der Gang nach dieser Seite zufällt; hingegen fallen die Puncte M, G auf die Seite des liegenden.

Seite	Zeile	statt	lies:
344	23	angebauten	abgebauten
345	6	C	CB
—	7	gerade	söhlige
358	14	x sin. y.	× sin. y
359	11	x tang. D.	× tang. D

362 10 nach machen soll stehen: entweder unmittelbar aus A, D, b nach §. 419 II. Tab. sphär. Trig. II. Fall Nro 1. oder mittelbar aus vorherge-

hen-

henden Proportionen, in dem man erst aus A, x, y die Seite d, oder aus D, x, y die Seite a sucht. Nur muß im letztern Falle anderswoher gegeben seyn, o B spitzig, oder stumpf ist.

Seite	Zeile	statt	lies:
376	23	AI $\overline{\overline{\#}}$	AI $\overline{\overline{\#}}$ GF
383	9	Gkh	Gkh, und gF (Nr. 1. — 5.)
385	3	ist	so ist

Von der II. Abtheilung des III. Theiles, oder höhern Geometrie.

Seite	Zeile	statt	lies:
418	10	Np	mp
432	14 u. 20.	sin. (m + n)	sin. (m + n) z
443	5	$(a^2 - x^2)^{-1}$	$(a^2 + x^2)^{-1}$
474	13	dZ^2	dZ
—	14	dZ	$d^2 Z$
479	24	P = y	PM = y
480	16	(PM + pm)	$\frac{1}{2}$ (PM + pm)
485	9	DC : DC	Dc : DC
508	12	$\frac{1}{4}$ P	$\frac{1}{4}$ p^2
510	10	2 sin. α^2	2 sin. α^3
511	16	sin. α^2	sin. α^3

München, gedruckt mit Zänglischen Schriften.

Vorschläge

zur

Vervollkommnung

der

Markscheiderinstrumente

nebst einer

Tabelle der Seigerteufen und Sohlen

sowohl,

als Breiten und Längen in 0, 1 Theilen einer Prim nach der Decimaleintheilung.

Von

Ignaz von Voith,

kurpfalzbaierischem Landes-Direktionsrathe in Amberg, der botanischen Gesellschaft zu Regensburg Ehren- und der mineralogischen zu Jena korrespondirendem Mitglied.

Landshut,

in der Weber'schen Buchhandlung 1805.

Vorrede.

Schon lange war ich gesonnen, meine Ideen zur Verbesserung einiger Werkzeuge der Markscheider öffentlich bekannt zu machen; allein immer gab es Ursachen, die mich an der Ausführung meines guten Willens hinderten. Unterdessen ist mir nun Herr Breithaupt mit seiner Beschreibung eines neu erfundenen Markscheiderinstrumentes *) vorgeeilet.

Obwohl dadurch meine Projecte vielleicht etwas an ihrem Werthe oder wenigst am Reitze der Neuheit verloren haben, so haben sie doch zu-

*) Beschreibung eines neu erfundenen Markscheiderinstrumentes nebst Anweisung zum Gebrauch desselben; von Heinr. Carl Wilhelm Breithaupt ꝛc. Mit 6 Kupfertafeln. Kassel in Verlag der Griesbachischen Hofbuchhandlung 1800.

zuverläßig an innerm Gehalte und Mannigfaltigkeit indessen gewonnen. Ich glaube daher, daß ich keine ganz unnütze Arbeit unternehme, wenn ich mein Vorhaben auch jetzt noch in's Werk setze; besonders da diese Schrift in Verbindung mit der Markscheidekunst, welche mein verehrungswürdiger Freund, Herr Prof. Magold mit vorzüglicher Rücksicht auf mein Vaterland, herausgiebt, zu erscheinen bestimmt ist, und es meinen Landsleuten nicht unangenehm seyn kann, bey dieser günstigen Gelegenheit die Gebrechen der alten Instrumente und die Verbesserungen derselben kennen zu lernen. Die Abweichungen des Breithauptschen und meines Endzweckes machen — ohne in's Detail der innern Einrichtung zu gehen — von selbst eine Verschiedenheit unserer Anlage der Instrumente unvermeidlich. Wenn wir uns dessen ungeachtet hie und da von ungefähr nahen, so wird mich hoffentlich Niemand mehr eines Plagiums beschuldigen, als man Herrn Breithaupt Vorwürfe machen kann, daß er längst bekannte Vorrichtungen auf eine andere Art zusammengesetzt hat. Wessen Vorschläge bestimmter, ausführbarer, sachgemessener und überhaupt brauchbarer sind, mögen Kunsterfahrne entscheiden.

War:

Warum ich die Magnetnadel in üblen Ruf zu bringen suche, darüber habe ich, wie ich glaube, hinreichende Gründe in den folgenden Blättern angegeben *). Ich habe kostbare Beyspiele gesehen, und selbst die traurige Erfahrung gemacht, wie weit man bey aller Genauigkeit und Vorsicht durch dieses Instrument verführt werden könne. Daß sich die Alten selben ganz und unbedingt vertrauten, darf man sich nicht wundern. Die guten Leute ließen sich wohl von vielen andern Dingen nichts träumen, die wir jetzt als ungezweifelte Wahrheiten erkennen. Wer wird so ungerecht seyn, ihnen ihre Unkunde zu verargen? Wer wird aber auch so viele Vorliebe für sie hegen, sogar ihre erwiesenen Irrthümer zu vertheidigen, und beyzubehalten?

Bey weitem nicht alle Instrumente, die im Verfolge dieser Schrift beschrieben sind, gehören unter die neuen oder meine Erfindungen; allein

da

*) Auch die französische Regierung sucht dieß wandelbare Werkzeug aus den Gruben zu entfernen, wie neuere Nachrichten angeben.

da einige dieser Fremdlinge ungeachtet ihres erwiesenen Nutzens und des langwierigen Gebrauches, der mehrern derselben in einzelnen eingeschränkten Gegenden schon lange das Bürgerrecht erworben hat, noch immer weit weniger bekannt sind, als sie es zu seyn verdienen; so halte ich's schon für ein lobenswürdiges Unternehmen, sie weiter bekannt zu machen, und sie vielleicht gar der Vergessenheit zu entreissen. Andern habe ich bloß durch mehr oder minder wichtige Modifikationen eine zweckmäßigere Gestalt oder grössern Umfang der Anwendbarkeit gegeben; und nur so weit dehne ich auch mein Eigenthumsrecht auf selbe aus. Ueberall habe ich die Quelle, aus der ich geschöpft habe, redlich angezeigt, und immer jedem ehrlich das Seinige gelassen. Sollte ich dessen ungeachtet eines andern Erfindung zu nahe getreten seyn; so bitte ich, mir's auf's Wort zu glauben, daß es ohne mein Wissen geschah, und feyerlich gebe ich ihm seinen Antheil hiemit zurück.

Endlich glaube ich's mir selber schuldig zu seyn, die Leser aufmerksam zu machen, daß die hier vorgetragenen Ideen die Früchte der wenigen Muße sind, welche mir die überhäuften

Amts=

Amtsgeschäfte und vielfältigen Unannehmlichkeiten meiner besondern Verhältnisse bisher nur sparsam vergönnten. Man wird daher keine vollendete Arbeit von mir erwarten, und es mir nachsehen, wenn im Gedränge der Amtsangelegenheiten und Sorgen zuweilen die scharfe systematische Ordnung Schaden litt, entbehrliche Wiederholungen einflößen, der passendste Ausdruck verfehlt wurde, der Vortrag etwas dunkel ausfiel, und die Beschreibung den Gegenstand nicht erschöpfend genug darstellte. Kleine Nebenumstände ließ ich im Vertrauen auf die Kenntnisse des Künstlers, dem ich die bessern Abänderungen meiner Vorschläge überhaupt frey stelle, geflissentlich weg; daß entgegen manches in diese Schrift eingeflossen ist, das einem und dem andern Leser entbehrlich scheinen kann, hat seinen Grund in besondern Umständen, die ich hier nicht auseinander setzen darf.

Später bin ich vielleicht im Stande, durch Bekanntmachung einiger Verbesserungen im Eisenhüttenwesen darzuthun, daß ich die Markscheidekunst nur als wesentliches Bedingniß zur Einrichtung eines regelmäßigen Bergbaues behandelt habe — und dadurch so glücklich, mich gegen

VI

Vorwürfe von anderer Seite öffentlich zu rechtfertigen.

Geschrieben zu Bodenwöhr
im Heumonate 1803.

v. Voith.

Vorerinnerung zu nachstehender Tabelle der Seigerteufen und Sohlen sowohl, als der Breiten und Längen.

In mehrern Lehrbüchern der Markscheidekunst sind Tabellen für die Seigerteufen und Sohlen eingerückt, aber immer für die Abtheilung des Lachters in Achtl, gegenwärtige, die Herr von Voith mit Beyhülfe einiger seiner Freunde, vorzüglich des Herrn Professors Moritz in Amberg berechnet hat, beziehen sich auf die in den bairischen und östreichischen Staaten eingeführte Eintheilung des Lachters in Zehutheile.

Meine Berufsgeschäfte, und vorzüglich die kurze Zeit erlaubten mir nicht diese Tabelle ganz zu revidiren, untersuchen, und aufs neue zu berechnen, doch besorgte ich eine genaue Correctur des Druckes, und gab ihr eine den trigonometrischen Tabellen ähnliche Einrichtung, wodurch sie also jedem, der letztere kennt, verständlich ist.

Die

Die Anwendung dieser Tabelle auf die Bestimmung der Seigerteufen und Sohlen für jede gegebene Donlage und Neigung derselben, so wie die Bestimmung der Breite und Länge aus der Sohle und ihrem Streichen, habe ich in der Markscheidekunst hinlänglich erkläret, und wird ohnehin für einen Markscheider, der doch allemal Geometrie und Trigonometrie verstehen muß, keine Beschwerniß haben.

Vom 5ten Grade an sind die Seigerteufen und Sohlen nicht mehr für einzelne Minuten, sondern von 5 zu 5 Minuten angegeben, für die dazwischen liegenden Minuten muß man sie erst aus der Tabelle berechnen. — Wo große Schärfe gefodert wird, und bessere Instrumente eine genaue Bestimmung der Winkel gestatten, ist's allemal besser die Berechnung nach den gewöhnlichen logarithmisch-trigonometrischen Tabellen vorzunehmen, wodurch dann diese Tabelle ganz entbehrlich wird. Landshut den 25ten August 1804.

Magold.

Vorschläge

zur

Vervollkommnung

der

Markscheiderinstrumente.

§. 1.

Entstehungsgründe der gegenwärtigen Schrift.

Der Nutzen, den die Einführung der Magnetnadel in's Gebieth der Wissenschaften und Künste der menschlichen Gesellschaft gewährt, ist von Sachkündigen allgemein anerkannt. Die wichtigsten Vortheile bezieht von dieser Erfindung die Schiffahrt und der Bergbau. Was würden unsere Seefahrer ohne diesem trefflichen Werkzeuge heut zu Tage nrch seyn? Bedachtsam würden sie an den Küsten hinschleichen, und schüchtern bey jeder Annäherung einer Gefahr in sichere Schlupfwinkel sich flüchten. Noch würden wir Amerikas Exi-

stenz ohne dieses Hilfsmittel, so wenig als unsere Vorältern vor tausend Jahren muthmassen, noch würden wir die Welt zu umsegeln eben so wenig als sie gewagt haben; noch würden wir die Schätze entfernter Welttheile, die unsern Bedürfnissen wohlthätig steuern, unsere Bequemlichkeit freundschäftlich befördern, unsere Ueppigkeit wollüstig nähren, und unsere Kenntnisse täglich mit neuen großen Entdeckungen bereichern, so wenig als sie argwohnen. — Der Bergmann würde ohne einen solchen Leitfaden in seinem unterirdischen Labyrinthe noch zur Stunde wie einst die Griechen und Römer nur im Finstern herum tappen, oder wie sie ganze Berge von oben nieder abzutragen gezwungen seyn, noch würden ihm die ergiebigsten Anbrüche verborgen liegen; noch würde er die verlornen Lagerstätte sehr oft mit vieler vergeblicher Mühe und schweren nicht selten verschwendeten Unkosten wieder erschrotten, oder gar nicht mehr finden; noch würde er nicht selten die gesegneten Gruben und seinen Broderwerb zu seinem größten Verdruße und der Unternehmer nicht geringern Nachtheile, vielleicht auch Untergange verlassen müssen.

Indessen ist nicht zu widersprechen, daß die Anwendung der Magnetnadel auf dem festen Lande mit weit mehreren Schwierigkeiten als auf der See verbunden ist. Die langwierigen Oszillationen einer guten Nadel — und gut soll sie doch allemal seyn —, die Ursachen, welche diese Oszillationen erregen und verlängern — und wie viele und mancherley giebt es deren nicht?

nicht? — Die Unbeständigkeit ihrer Abweichung von der Mittagslinie — die zuweilen schnell hintereinander auf verschiedene Art wechselt — diese allerdings giltigen Gründe haben die sogenannten Feldmesser schon immer abgehalten, Gebrauch von einem so zweydeutigen Dinge zu machen. Dazu kömmt noch ihre Reitzbarkeit gegen das Eisen, und nur zu leicht kann sich ihr gegen alle Vermuthung und Wahrscheinlichkeit, besonders über Tag, hievon etwas nähern! — Eben dieser Umstand ist es auch, der die Magnetnadel schon früh aus vielen Eisensteingruben, ohne Unterschied des Gebirges, verscheuchte, und aus den meisten, wo nicht aus allen entfernen sollte. Die Erfahrung hat mich mit fremden und eigenen Schaden gelehrt, daß Magnet-Eisenstein — freylich bald in grössern bald in kleinern Parthien — zwischen Eisensteinarten einbreche, wo man sein Daseyn ganz und gar nicht glauben sollte. Unglücklicher Weise gehört die Eigenschaft, die Magnetnadel irre zu führen, dem metallischen Eisen und dem Magnet-Eisensteinen nicht ausschließlich zu. Seitdem die Mineralogie mehr ausgebildet worden, haben wir viele Gesteinsarten kennen gelernt, die auf die Magnetnadel mehr oder minder unter gewissen Umständen, aber immer so viel wirken können, daß des Markscheiders Plane und die nach derselben Instruction verwendeten Unkosten verloren sind. Ist es wegen dem ersten — dem mettallischen Eisen und Magneteisenstein — nothwendig gewesen, sich des Kompasses bey Vermessungen in seiner Nachbarschaft gänzlich zu enthalten; so ist es wegen den letztern — den magneti-

schen Gesteinsarten*) nützlich und den Regeln der Vorsicht gemäß, den Gebrauch desselben so viel möglich zu beschränken. Oder fürchten wir bey jenem mehr, als bey diesen zu wagen? Ich zweifle sehr, ob — im Ganzen genommen — so viel Magneteisenstein als magnetische Gesteinsarten in den Grubengebäuden vorkommen.

Allein welches Instrument soll uns für diesen Entgang den vollständigen Ersatz leisten? Die der Feldmeßer taugen, so wie sie wirklich sind, theils wegen ihrer innern Einrichtung, theils wegen ihrer mechanischen Bauart nicht in die Grube; die Eisenscheiben haben trotz der vielfältigen Abänderungen und Verbesserungen noch wesentliche Unvollkommenheiten, und werden sie ewig behalten; denn sie sind nach ihrer ersten Anlage der Vollkommenheit unfähig, die zu diesem Behufe neu erfundenen Werkzeuge haben noch alle mißlungen und meistens nur die alten Gebrechen mit neuen vertauscht.

Ueberdieß hat der Kompaß auch beym Zulegen Unbequemlichkeiten, die auf kleinen Grubengebäuden, ohne eigentliche Markscheidereyen, auf Hammerwerkern u. s. w. sehr bedeutend werden. Diesen ist noch gar nicht vorgebeugt. Sollen deßwegen Verbesserungen

---

*) Ob es wirklich Gesteinsarten giebt, die, ohne Magneteisenstein zu enthalten, magnetisch sind, wird die Fackel der Zeit unpartheyisch aufhellen.

gen in einer so kitzlichen Sache nicht um so angenehmer seyn? *)

Als praktischer Bergmann, der selbst das Geschäft des Markscheiders öfter zu übernehmen genöthiget war, schlage ich daher zu den unterirrdischen Vermessungen und zum Zulegen der Grubenrisse die in der Folge beschriebenen Instrumente vor, und glaube sie eben darum auch desto zuversichtlicher vorschlagen zu dürfen, weil ich selbst mit der Ausübung bekannt bin.

§. 2.

Beschreibung des ungarischen Meßbockes.

In Ungarn sind nicht nur die Gänge größtentheits sehr mächtig, sondern es werden auch nach einer richtig berechneten Oekonomie alle Gebäude, besonders die Stollen und Strecken ungemein geräumig geführt. Die Antreibung der Spreitzen — das gewöhnliche aber sehr mühsame und allemal unzuverläßige Hilfsmittel beym Verschnüren der Gruben — geht daher in diesen Gruben eben so wenig an, als

das

*) Wer nach den berechneten Längen und Breiten seinen Plan zulegen will, muß ohnehin ein Instrument haben, nach welchem er die Horizontalwinkel (und wohl auch die Vertikalwinkel) schärfer abnehmen kann, als auf dem Kompaße und Gradbogen, wenn ihm je der Erfolg der Mühe lohnen soll.

das Schlagen der Pfähle in das Trettwerk oder feste Gestein. Man gebraucht daher in jenen Bergrevieren den Meßbock bey allen bergmännischen Vermessungen ohne Unterschied, und kömmt damit überall auf die leichteste und sicherste Weise durch. Ich habe ihn ausser jenen Gegenden noch nirgends gesehen, und halte ihn deßwegen um so mehr einer umständlichen Beschreibung werth, da er sehr viele unverkennbare Vorzüge vor allen andern Arten von Stativen besitzt, und keine ihrer Unannehmlichkeiten hat.

abcdef (Fig. 1.) sind 2 mit Zinken (Schwalbenschwänzen) beynahe im rechten Winkel zusammengeschlossene Stücke Eichenbretter, beyläufig von 1 Schuh Breite und 2 $\frac{1}{2}$ Schuh Länge.*) Gewöhnlich sind sie durchaus von gleicher Breite, sie könnten aber auch gegen oben zu allmählig schmäler werden. Durch diese 2 Bretter laufen quer 2 andere dergleichen Stücke gh und ik dergestalt, daß sie der Länge nach beyderseits 1 bis 1 $\frac{1}{2}$ Schuh hervorragen. Alle 4 sind zur Hälfte gegeneinander eingeschnitten, wie Fig. 2 bey pq und Fig. 3 bey yZ zeiget. Die Querbretter ghik werden, nachdem sie fest oder gehebe in die 2 rechtwinklicht zusammengezinkten Bretter abcdef mit den Abschnitten yZ in pq eingeschoben sind, von unten mit 2 mes-

sin-

*) Die Höhe, also auch die Weite oder der untere Abstand der beyden Schenkel hängt jedoch von der Willkühr und Bequemlichkeit des Markscheiders und von der Oertlichkeit der Grube ab.

fingenen Hacken Fig. 3 in tu zusammengehängt. Bey x können sie oval ausgeschnitten werden. In abef Fig. 1 sind 4 stählerne gehärtere Plättchen mit Endspitzen, die nur wenig vorragen, zur Seite angeschrauvet, den Meßbock überall damit festzustellen: no sind Ausschnitte, damit die Basis des Meßbockes nur auf wenigen Puucten aufruhe, und also nicht wackeln könne. In lm sind 2 messingene Schrauben mit vorragenden Köpfen, die rückwärts in messingene Mutterschrauben eingeschraubt, und die Schnur darum zu schlingen bestimmt sind. Der Aufsatz v besteht aus dem gekröpften umgebogenen Messingplättchen, welches auf beyden Seiten mit 2 Holzschrauben an der in Fig. 1 bemerkten Stelle festgemacht wird. r, s sind 2 in das Plättchen eingeschraubte oder fest eingenietete Stifte oder Säulchen, wovon um das eine s eine Schließe α und β (Fig. 4.) beweglich, und in das andere r Fig. 5 eine Spur, die Schließe g aufzunehmen, eingefeilt ist. Durch die nunmehr entstehende viereckige Lücke wird bey der Vermessung die Schnur gezogen, und deßwegen soll sie nicht viel größer, als es die Dicke der Schnur erfodert, werden. Für sehr niedrige und verkrüppelte Grubenbaue und für flache Schächte und Gesenke muß man natürlich auch niedrigere Meßböcke an der Hand haben, die man sich leicht verschaffen kann, wenn man den Theil unter dem Sitzbrettchen beyderseits verkürzet. In diesem Falle muß der Meßbock von dem auf dem Trettwerke davor sitzenden oder auf den Schlachtkränzen stehenden Manne festgehalten werden.

Will man dem Aufsatze v gar die Gestalt eines sehr verkleinerten Meßbockes von 6 oder 8 Zoll Höhe geben, d. i. selben wie den Obertheil des Meßbockes bis an g, h und ik Fig. 1 bilden, ihn über die Quere auf einem starken Brettchen, das auf den Seiten gleich den und in der Richtung mit den Querbrettern gh und ik einige Zolle vorragt, sicher befestigen und die Zapfen lm in der Gegend zwischen hi dieß- und jenseits anbringen; so kann man diese Vorrichtung überall brauchen, wo es möglich ist, Spreitzen fest genug anzutreiben; denn mit 4 Schrauben durch die 2 vorragenden Enden ist sie überall leicht zu befestigen.

§. 3.

Anwendung des Meßbockes.

Bey der Verschnürung mit dem Kompaße sind 2 ganz gleiche, oder wenigst ganz gleichhohe, Meßböcke erforderlich, mit welchem auf folgende Art verfahren wird.

An die Schraube l des Meßbockes A (Fig. 6.) wird die Schnur festgemacht, diese sodann zwischen r und f (Fig. 1.) durchgeführt, auf gleiche Art durch die nämlichen Säulchen r und f des Meßbockes B geleitet, beyderseits sogleich die Schließe (Fig. 4.) α und β g sperret, und endlich die Schnur am Zapfen m des Meßbockes B befestiget. A bleibt auf dem gewählten Punkte unbeweglich stehen, B aber wird bey

ef

ef aufgehoben, mit ab Fig. 6. von x nach y gerückt, und sodann bey ef wieder niedergelassen. Hiedurch kann die Schnur dergestalt gespannt werden, daß der Fehler der Kettenlinie unmerklich ausfällt. Damit die Böcke durch die Spannung nicht von der Stelle gezogen werden können, wird ein Bube bey A auf gh, und ein anderer bey B auf ik mit ausgestreckten und angestemmten Füssen gesetzt.

Wenn die Länge der Schnur, Grad und Stunde, wie gewöhnlich abgenommen ist, wird die Schnur abgelöst, der Meßbock A vor B nach C gestellt, der Bursche, ohne die Stellung des Meßbockes B im geringsten zu verändern, von ik in die nemliche Situation nach gh zu tretten geheißen, und dann auf gleiche Art wie vorhin vorgeschritten.

Da zuweilen ein solcher Meßbock auf einen bestimmten Punct gesetzt werden muß, so habe ich ein Häckelchen genau unter rs angebracht, um einen Senkel einzuhängen, der durch den ovalen Ausschnitt x (Fig. 1. und 3.) spielt. Mittels dieses kleinen Kunstgriffes kann der Meßbock zu aller Zeit nach Belieben oder Bedürfniß gestellt werden.

Wie sehr diese Vorrichtung die Arbeit des Markscheiders sowohl in der Grube als über Tag versichern, erleichtern und beschleunigen müsse, kann dem Unbefangenen nicht entgehen. Indessen eine Spreitze ange-

getrieben, oder ein Pflock geschlagen wird, *) ist bey der Anwendung des Meßbockes der ganze Zug schon eingetragen. Und wie mühselig muß sich der Markscheider an weichen Stellen die meisten Male plagen, bis er einem Pflocke den nöthigen festen Stand zu geben vermag? Legt er hingegen dem Meßbocke ein Stückchen Brett unter, so hat er seine Absicht ohne weiteres erreicht. Dabey erhält er im Verlaufe der ganzen Verschnürung ohne besondere Aufmerksamkeit darauf verwenden zu dürfen, die ächte Neigung der Tonnlage; etwas, das immer schätzenswerth bleibt, wenn man's auch nicht auf der Stelle bedarf. U. s. w.

Körper, die nur auf 3 Puncten ruhen sind allerdings mit leichterer Mühe festzustellen; **) allein hier kann dieser günstige Umstand der Statik nicht benützt werden; denn man würde sich hierdurch nur die Vermessungen auf Gestängen bey kleinen Winkeln u. s. w. erschweren. Daher hat der in Ungarn übliche Meßbock mit 4 Ruhepuncten vor jenen mit dreyen den verdienten Vorzug erhalten.

§. 4.

---

*) Die unvermeidlichen oft beträchtlichen Fehler dieser Schnurbefestigung kennt jeder Markscheider.

**) Jede Unterlage kann das Wackeln des Meßbockes verhindern. Der Meßbube muß sich vorläufig mit solchen von verschiedener Art versehen.

§. 4.

Vorbereitung des Meßbockes für die Folge.

Zu meinem Gebrauche muß ich an der beschriebenen Vorrichtung eine kleine Abänderung vornehmen, damit ich das in der Folge beschriebene Meßinstrument darauf anbringen kann. Es wird nämlich jenes Säulchen r (Fig. 1. u. 5) welches die Spur zur Aufnahme der Schließe hat, so dick und hoch gemacht, daß es das Meßinstrument zu tragen vermag, ohne die Operationen, wozu es bestimmt ist, auf irgend eine Art zu hindern Der Theil unter der Schließe bekömmt, damit die Richtung der Schnur in keinem Falle unrichtig werde, gegen das andere Säulchen s (Fig. 1. u. 4.) hin beyläufig die keilförmige Gestalt, welche Fig. 7. V oder s vorstellt; sie kann auch noch anderst beschaffen seyn, wie jedermann von selbst begreift; wenn sie nur bewirkt, daß die Schnur bey der Abnahme spitziger Winkel nicht seitwärts anliege und folglich Unrichtigkeiten veranlasse. Dicht oberhalb der Schließenspur, doch noch so weit entfernt, daß die Schnur bequem eingezogen werden kann, sollte es gegen das andere Säulchen s etwas gebogen (gekröpft) werden a (Fig. 8.), damit das darauf gesetzte Instrument unter allen Umständen gerade in der Mitte zu stehen komme; ausserdem müßte man genau aufmerken, daß dieses Säulchen während der ganzen Verschnürung immer rechts oder links bliebe.

Die Gestalt des Obertheiles dieses Säulchens richtet sich nach der Art der Anfertigung und des Instrumentes selbst. Für diejenigen Instrumente, die ich beschreiben werde, werde ich die Bildung desselben sogleich an geeigneten Orte gezeichnet und beschrieben beyfügen.

Bey der Verschnürung mit dergleichen Instrumenten sind 3 solche Meßböcke nothwendig. Wem die Ursache hievon noch unbekannt seyn sollte, der wird sie bey der Lehre von der Anwendung deutlich vorgetragen finden.

§. 5.

Beschreibung des abgeänderten Höschelschen Scheibeninstrumentes.

Für das erste Instrument habe ich das vortreffliche Winkel- oder Scheibeninstrument meines Freundes Höschel zum Grunde gelegt;*) ich werde daher auch dessen Beschreibung, bis auf die im Instrumente selbst getroffenen Abänderungen, wörtlich beybehalten. Bevor ich aber hievon etwas sagen kann, muß

*) Christ. Kasp. Höschels kurze Beschreibung eines neuen bey ihm verfertigten Winkel- oder Scheibeninstrumentes ꝛc. Augsburg in der Klett- und Frankischen Buchhandlung 1794 mit einem Kupfer. — Da Hr. Höschel selbst meine Meinung über die Anwendbarkeit seines Scheibeninstrumentes zu Grubenvermessungen mir abfoderte, so schmeichle ich mir, daß es ihm angenehm seyn werde, hier seinen Wunsch erfüllt zu finden.

muß ich die Einrichtung des im vorgehenden §. nur im Allgemeinen beschriebenen Zapfens Fig. 8. mit Hinsicht auf gegenwärtiges Instrument umständlicher auseinander setzen. Um nämlich dieses Instrument mittelst jenes gekröpften Zapfens auf dem Meßbocke befestigen, und dabey nach Willkühr und Bedürfniß behandeln zu können, müssen dicht oberhalb der Kröpfung zwo Scharnieren bb unter einem rechten Winkel übereinander angebracht werden. Die Scharnieren sind gemäß der Zeichnung im Großen denen an guten Zirkeln ähnlich, und bedürfen also keiner nähern Beschreibung. Sie können mittelst zwoer Schrauben cc leicht und strenge beweglich, oder ganz festgestellt werden. Die Vorrichtungen mit Schrauben ohne Ende und andere dieser Art möchten deßwegen nicht wohl anwendbar seyn, weil man zu besorgen hat, daß das Ganze zu hoch würde, um in der Grube nicht Ungelegenheiten zu verursachen. Oberhalb den Scharnieren bb befindet sich ein gewöhnlicher hinlänglicher starker Absatz dd, auf welchem das aufgesteckte Instrument auffitzt. Die übrige Verlängerung ddg muß, wie bekannt, genau in die Höhlung des Untertheiles des Instrumentes passen. Man könnte auch den Zapfen, worauf die im §. 21. beschriebene verbesserte Eisenscheibe gesetzt wird, mit den nöthigen kleinen Modifikationen hier eben so gut brauchen, nur, wo die Neigung der Sohlen in kurzen Distanzen sehr wechselt, hat die eben vorgeschlagene Vorrichtung nicht unbedeutende Vorzüge. Nun zur Beschreibung des Instrumentes selbst.

A Fig. 9. ist eine messingene Hülse, die an das nach der eben gemachten Beschreibung in dem Zapfen, gabbg (Fig. 8.) verlängerte Säulchen α und β (Fig. 1. und 4.) genau paßt, und daran mit der Stellschraube a nach geschehener Rückvisirung aus dem Rauchen festgestellt wird. Mit der Hülse A ist die dreyeckichte messingene Standplatte B verbunden, und über dieser Standplatte ist eine andere C, welche das ganze Instrument trägt. An die Standplatte C ist von unten ein messingener Nagel befestiget, der am untern Ende eine nußförmige Figur hat, und in einer auf B befindlichen runden Höhlung sich dreht, damit man das Instrument vermittelst der 3 Schrauben ccc endlich im Feinen horizontal stellen kann, nachdem es zuvor theils durch die Richtung des Meßbockes, theils durch Beyhülfe der an dem Säulchen oder Zapfen gg (Fig. 8.) für den Nothfall angebrachten 2 Scharnieren und Stellschrauben b und b aus dem Rauhen horizontal gestellt worden. In Fig. 10. ist der Nagel sammt der Nuß und Höhlung bey y im Durchschnitte abgebildet; xx sind 2 aufgeschraubte halbkugelförmige Stücke.

Die 3 Schrauben ccc gehen in beweglichen Müttern, damit sich die Schrauben bey etwas schiefen Stande nicht stemmen.*)

auf

*) Man kann auch die 3 Schrauben ccc von unten durch die Platte B gehen, und durch die Platte C drucken lassen; ich halte dieses hier sogar für besser.

Auf die Platte C ist ein zylinderischer hohler Zapfen mit 3 Schrauben vvv aufgeschraubet, über welchen die doppelte Büchse D mit einer Stellschraube d gesteckt wird. Mit der Stellschraube d, welche auf eine Feder drückt, wird der Obertheil des ganzen Instrumentes festgestellt. In der erstgedachten doppelten Büchse, woran auch das Stück M mit der Schraube ohne Ende und der Arm T mit der beweglichen Mutter für die Mikrometerschraube K (Fig. 9. und 11.) befestiget ist, bewegt sich ein dichter Zapfen, der an der Horizontalscheibe S fest ist, damit sich eben diese Scheibe sammt dem Vertikalaufsatz allein bewege, und das Stück M mit der Schraube ohne Ende zur Horizontalbewegung und zum Terminus a quo bleibe, wie es eben zuvor beym Rückvisiren durch die Mikrometerschraube K vollends gerichtet worden; ist dieses Rückvisiren geschehen, so läßt man die Stellschraube d fest andrücken. Die Fig. 10. stellet auch die doppelte Büchse D im senkrechten Durchschnitte vor; αα ist der hohle, q der dichte Zapfen, ββ DD die Büchse. Die Mikrometerschraube ist in Fig. 11. zerlegt, und durchschnitten; a ist die Mutter, b die Schraube, c der Ansatz, d der Schlüssel oder Kopf; a und c sind um ein Zäpfchen e beweglich. S Fig. 9. ist die einem Rade ähnliche Horizontalscheibe, die nicht mehr als 6 $\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser hat, und in 360 Grade getheilt worden ist; an ihrer Peripherie hat die Schraube genau 360 Einschnitte gemacht, die voll und auf das glätteste ausgeschnitten sind. M ist das Stück, welches die Schraube ohne Ende N trägt, an welcher ein

Schlüs-

Schlüssel s zur Bewegung angesteckt ist; an dem andern Ende dieser Schraube ist ein beweglicher Cadran Q in 60 Theile eingetheilet, davon jeder = 1 Minute ist. Durch die zween Bäcken, in welchen sich die Schraube ohne Ende beweget, ist der Zeiger y des Cadran Q gesteckt; an diesem ist eine kleine Hülse beweglich, die ebenfalls einen Zeiger m oder vielmehr eine auf eine schmale Fläche gezogene Linie hat, welche die Gradtheilung auf der Scheibe S abschneidet, d. i. die paßirten ganzen Grade zählet.

Da es bey grossen Winkeln höchst unbequem und dem Instrumente nachtheilig wäre, wenn man die Bewegung durch lauter Schraubenrevolutionen machen müßte, so ist dafür gesorgt, daß man die Schraube ohne Ende N so lange aus ihren Einschnitten an der Peripherie der Scheibe S auslösen, und die Scheibe aus dem Rauhen, so viel der zu nehmende Winkel nöthig hat, bewegen kann; wenn man diesen Raum paßirt hat, so läßt man die Schraube ohne Ende los; die dabey angebrachte Feder wird sie schon wieder gehörig andrücken, und eingreifend machen.*)

V ist der Vertikalaufsatz, zwischen dem sich der Vertikal-Gradbogen G beweget, der den nämlichen Durch-

*) Es wäre vermuthlich besser, wenn der Befestigungspunct der Feder, der hier an einem Ende angebracht ist, in der Mitte wäre, und die Feder mit beyden Enden andrückte.

Durchmesser, wie die Horizontalscheibe S, hat; die in der Peripherie befindlichen Schraubeneinschnitte sind wieder die nämlichen, und jeder hat genau den Werth von einem Grade.

Durch die zween Backen ee geht die Schraube ohne Ende O, oder bewegt sich vielmehr zwischen denselben; an einem Ende steckt wieder ein Schlüssel r zur Bewegung, am andern Ende ist ein beweglicher Cadran P in 60 Theile oder prima minuta getheilt. Der Gradbogen G ist links und rechts in 90 Grade getheilet, welche kein besonderer Zeiger oder Index, sondern die beyden Extremitäten des Vertikalaufsatzes V schneiden. Der Cadran P hat seinen eigenen Zeiger z. Wenn man einen ansehnlichen Winkel zu nehmen hat, so kann hier ebenfalls die Schraube ohne Ende O aus ihren Einschnitten ausgelöset werden, wenn man das Stück h herunter drückt; läßt man es nach der Stellung des Gradbogens aus dem Rauhen wieder frei, so wird die Schraube auch wieder gehörig wirken.

An dem Vertikalaufsatze V sieht man noch ein besonderes Stück H, welches um den Zapfen der Achse des Gradbogens G etwas beweglich ist, und eine Libelle oder Wasserwage L trägt. Zur Berichtigung dieser Libelle nach dem Niveau und dem Zero des Gradbogens G dienen 2 Schräubchen gg, die an dem Vertikalaufsatze wechselweise andrücken. Diese Berichtigung der Libelle geschieht aber schon allezeit von

Hrn. Höschel, bevor ein solches Instrument versendet wird.

U ist das Visirrohr. Bey Messungen über Tag kann es aus einem Tubus, und nach Beschaffenheit der Anwendung aus einem achromatischen Tubus bestehen; bey unterirdischen Arbeiten ist es eine viereckigte Röhre von 18 bis 20 Zollen Länge, die an beyden Enden mit zwo doppelten Dioptern geschlossen ist. Die Okulardiopter hat unterhalb nur ein sehr kleines Löchelchen, und oberhalb ein Kreuz von feinen Haaren oder ein Glas mit einer feinen Kreuzlinie; die Objectivdiopter ist verkehrt gebaut; sie hat das Kreuz gegen unten, und das Löchelchen oberhalb.

Um die 4 Punkte — auf eine Vertikalebene — zusammenzustimmen, ist nothwendig, das zween korrespondirende Visionspuncte, nämlich ein Objectiv- und der dazu gehörige Okularpunkt in Schrauben $\alpha\beta$ beweglich seyn. Die Vorrichtung kann mit 2 gegenüberstehenden Schrauben, oder einer durchlaufenden ewigen Schraube gemacht werden. Fig. 12. zeiget das erste, Fig. 13. das zweyte. Eine nähere Beschreibung dieser bekannten Sache ist wohl unnöthig.

Vor dem Gebrauche dieses Instrumentes hat man erst folgendes zu beobachten: daß man Rindsunschlitt in einem kleinen Geschirre schmelzen lasse, und mit einem kleinen Haarpinsel alle Einschnitte der Peripherien sowohl an der Horizontalscheibe S als dem

Grad-

Gradbogen G sparsam beschmiere; das nämliche thut man bey dem Zapfen der Schrauben ohne Ende, wo sie in den Backen gehen, und beyderseits an demselben sich reiben. Das Fett, welches die Schrauben in den Einschnitten nicht dulden, wird mit einem leinenen Läppchen an den Rändern der Peripherie sauber wieder weggewischt.

§. 6.

Gebrauch dieses Instrumentes.

Bey dem Gebrauche dieses Instrumentes selbst hat man auf folgende Punkte Bedacht zu nehmen:

Erstlich muß das ganze Instrument auf jedem Standpuncte neuerdings horizontal gestellt werden.

In meisten Fällen verrichtet dieß aus dem Rauhen der Meßbock vermöge seines Baues von selbst, und soll auch allzeit darauf angetragen werden. Da sich's aber doch ereignen kann, daß dieser nicht zureicht, so nimmt man seine Zuflucht zu den zwo Scharnieren b, welche am Säulchen oder Zapfen g (Fig 8.) übers Kreuz angebracht sind. Indem man nach geschehener Nachlassung der Stellschraube a (Fig. 9) das ganze Instrument im Kreise herumdreht, wird man aus dem Stande der Luftblase der Libelle sogleich ersehen, wohin man selbes neigen, oder aufrichten müsse. Um aber das Instrument vollends genau in horizontalen Stand zu setzen, so giebt man ihm diese Rich-

tung durch die 3 Stellschrauben ccc, und wenn die Luftblase auf jedem Punkte bey der Herumdrehung des Instrumentes in der Libelle an dem Orte stehen bleibt, daß das mit Diamant gemachte Sternchen die Mitte derseben bezeichnet, so ist man des horizontalen Standes vom Instrumente versichert.

Dabey aber ist zu merken, daß man vor der Stellung genau Acht gebe, ob die beyden Zero des Gradbogens G von den zwo Schärfen des Vertikalaufsatzes V scharf abgeschnitten werden; wo nicht, so muß diese Stellung oder Berichtigung zuerst geschehen.

Wer eine Libelle oder Wasserwage von Höschels neuester Art, in Gestalt einer runden Büchse besitzt, der darf solche nur auf die Horizontalscheibe aufsetzen, so zeigt dieselbe sogleich nach allen Gegenden, wo gestellt werden muß, ohne daß man nöthig hat, das Instrument herumzudrehen.

Zweytens stellet man die Horizontalscheibe S so, daß der Index oder die Linie m genau das Zero oder den 360sten Grad schneidet, und der Zeiger y genau Zero oder 60 auf den Cadran Q weiset; weiset er es nicht, wenn gleich der Index m auf den 360sten Grad genau zusieht, so hält man mit dem Schlüssel s die Schraube ohne Ende, daß sie ihren Stand nicht ändert, und dehnet den Cadran, bis der Zeiger y genau o zeiget. Das nämliche Verfahren gilt auch bey der Stellung des Gradbogens G, bevor man damit Höhen- oder

Nei-

Neigungswinkel messen will; wenn die zwo Schärfen des Vertikalaufsatzes V die beyden Zero genau schneiden, so hält man ebenfalls die Schraube ohne Ende O mit dem Schlüssel t fest, und dreht den Cadran P, bis der Zeiger Z die o oder 60 genau weißt. Jetzt kann erst nach dem Anfangspunkte visirt werden.

Drittens: wenn man statt des Visirinstrumentes einen Tubus anbringen will oder muß, so stellet man sogleich das Glas mit der Kreutzlinie und die Okularröhre des Tubus, bis daß die Linien und Gegenstände dem Auge des Beobachters am deutlichsten erscheinen.

Will man nun die Vermessung z. B. der tonnlägigen Linien AB und BC Fig. 6. wirklich vornehmen, so setzt man auf jeden der Punkte A, B und C einen Meßbock, auf den Meßbock in B aber, nachdem die Schnur von B nach C gespannt ist, das eben beschriebene Instrument, läßt die Stellschraube a nach, stellt sich vor die Objektivdiopter nämlich vor α, und dreht das gesammte Instrument, bis die senkrechte Linie der Kreutzfäden*) auf der Seite der Okulardiopter β das Object A, von dem man zu messen anfängt, oder das man auf dem vorigen Standpunkte des Instrumentes aufgestellt hat, genau schneidet; hat man aber die Richtung oder den Winkel dieser Linie mit dem Kompaße oder auf andere Art vorher schon bestimmt,

*) Oder, wenn die Zeichnungen in das Glas geschnitten sind, der Kreutzlinien.

stimmt, so stellet man am besten das Instrument vor dem Visiren auf den nämlichen Winkel. Alsdann zieht man die Stellschraube a wieder fest an. Diese Stellung des Instrumentes geschieht zwar aus dem Rauben, wie bey den übrigen Theilen mit freyer Hand; allein da die Stellung in's Feine ohne mechanische Hilfe die Arbeit sehr verzögern würde, so wurde dem Instrumente die Mikrometerschraube K beygefügt. Nun mißt man den Horizontalwinkel der beyden Tonlagen BA, BC, indem man vor die Okulardiopter bey B tritt, und wenn der Winkel klein ist, die Schraube ohne Ende N an der Horizontalscheibe S dreht. Ist aber der zunehmende Winkel groß, so hat man, wie bereits erinnert worden, nicht nöthig, so viel Schraubenumgänge zu machen, als der Winkel groß ist, sondern man löset die Schraube aus den Einschnitten der Peripherie aus, und beweget die Scheibe S, bis man den verlangten Gegenstand c in campo visionis oder Sehnfeld des Tubus oder Visirrohres erblickt; hierauf läßt man die Schraube ohne Ende von der Feder wieder in die Einschnitte drücken, uud schraubet sodann vollends, bis die senkrechte Linie der Kreutzfäden in der Objectivdiopter des Tubus oder Visirrohres den Gegenstand genau schneidet; sieht dann, wie erst gemeldet, nach, wie groß der Index m den Winkel in Graden und der Zeiger y am Cadran Q in darüber zählenden Minuten angiebt. Bey den Höhen- oder Neigungswinkeln verfährt man auf die nämliche Art, wie bey den Horizontalwinkeln d. i. bis die Horizontallinie der Kreutzfäden den Gegenstand ebenfalls genau schneidet,

wird

wird nach Beschaffenheit des Winkels der Bogen G theils aus freyer Hand, theils durch die Schraube O empor oder abwärts gekehrt.

Ich muß aber hier noch eine Anmerkung machen, die beym Aufnehmen der Horizontal- und Vertikalwinkel genau beobachtet werden sollte. Eigentlich sollten die Umdrehungen mit der Schraube ohne Ende alle nach einer und derselben Richtung z. B. gegen die rechte Hand geschehen. Da dieses bey den Vermessungen der Markscheider schlechterdings nicht angeht, indem sie sich nach der Lage der Linien und Winkel richten müssen; so bleibt ihnen, um den durch die verkehrte Bewegung entstehenden kleinen Fehler zu verhüten, oder doch in etwas zu korrigiren, nichts anders übrig, als daß sie, wenn sie die Schraube rechts gedreht haben, und nunmehr gegen die linke Hand bewegen müssen, um den Winkel zu bekommen, selbe so lange dahin drehen, bis sie das Object etwas jedoch nicht viel überschritten haben, damit sie die Schraube alsdann nach der ersten Direktion, nämlich von der linken gegen die rechte Hand sanft bewegen können, bis die Linie das Object genau schneidet, ohne selbes wieder zu überschreiten. Beobachtet man dieses nicht, so giebt es doch kleine Differenzen, welche bloß von dem Spielraum oder Luft, wie man zu sagen pflegt, entstehen, die die Schrauben zu ihrer Bewegung nöthig haben.

Bey den Vertikalwinkeln muß die Schraube ohne Ende O noch öfter bald von der rechten zur linken, bald von der linken zur rechten Hand bewegt werden. Ersteres geschieht bey Aufnehmung der Höhen- und letzteres bey den Neigungswinkeln; weßhalb auf dem Cadran doppelte Reihen von Zahlen, die die Minuten zählen, angebracht worden sind. Doch kann durch den eben angemerkten Kunstgriff allen dabey einschleichenden Fehlern vorgebeugt werden.

Zuweilen kömmt der Gegenstand, auf welchen vorvisirt, oder zurückvisirt werden soll, zu hoch oder zu tief zu stehen, als daß er bey senkrechtem Stande des Gradbogens G durch das Visirinstrument gesehen werden könnte. In diesem Falle muß daher der Vertikalaufsatz vielmehr der Gradbogen auf gut Glück zugleich mit der Horizontalscheibe nach Erforderniß behutsam bewegt, und nach dem Gegenstande gekehrt werden. Hat man den Gegenstand im Sehfelde, dann wendet und neiget man sie endlich einzeln mit den angebrachten Hilfsmitteln nach Bedürfniß.

Die Horizontalscheibe S könnte im Zusammenhange der Vermessung auf jedem neuen Standorte zwar eigentlich nach Belieben entweder wieder auf Zero gestellt, oder in der Stellung der vorher gegangenen Schnur erhalten und aufgesetzt werden; doch scheinet mir das letzter besser, weil es weniger Arbeit verursacht, das Instrument mehr schont, und überhaupts sicherer ist. Was auch immer gewählt wird, so muß

eines

eines wie das andere während der ganzen Verschnürung, wie leicht zu denken ist, gleichförmig beybehalten werden.

§. 7.

Berichtigungen einiger Bedenklichkeiten und nützliche Zusätze über und für das beschriebene Instrument.

Dieses Instrument zeiget die verlangten Dimensionen unter allen Umständen in der kürzesten Zeit, auf die leichteste Art, und mit de größter Schärfe; es ist also ganz gegen die Absicht, hier auch einen Kompaß noch anzubringen. Wenn indessen jemanden aus besondern Ursachen daran gelegen wäre, so könnte auch dieser zur Noth hingekünstelt verden. Doch müßte man, um einer Nadel von einige Länge Raum zu verschaffen, unvermeidlich den Durchmesser der Horizontalscheibe S um mehrere Zolle vergrößern, oder den Vertikalaufsatz weglegen, wodurch das Instrument auf der andern Seite beträchtlich verlieren würde. Ich halte es in diesem Falle überlaupt für rathsamer, statt des beschriebenen ein anders Instrument anzuwenden, wie ich in dieser Absicht späterhin auch eines beschreiben werde.

Wer die gebrechlichen Glasli[illegible]ellen in der Grube anzuwenden fürchtet, dem liefere ich bey dem nächstfolgenden Instrumente einen andern Senkel, den er

auf

auf der einen Seite des Vertikalaufsatzes anfertigen lassen kann, und wovon er an der Schärfe, bey gehöriger Aufmerksamkeit im Stellen, in der Anwendung keinen merklichen Schaden zu besorgen hat.

Die Libelle kann auch auf dem vertikalen Visirinstrumente angebracht werden. Alsdann fällt das Stück H als unnütz weg. Wie die Libelle auf dem Visirinstrumente angefertiget werden müsse, um sie horizontal stellen zu können, weiset Fig. 14. a ist eine Scharniere, b die Libelle, c eine Feder, die an der Libelle andrückt, d ein Theil der Visirröhre, e ein Stift mit einem Gewinde, und f die Stellschraube, welche die Feder spannt, oder nachläßt, und also die Lage der Libelle bestimmt; g ist eine andere Stellschraube, welche durch die Einfassung der Zirkelförmigen Oeffnung in der verlängerten Libellenkapsel geht, und die Stellschraube f in ihrem Stande sichert.

Wenn die Dioptern so vorgerichtet werden, daß man sie nach Belieben in die viereckichte Röhre einstecken und daraus wegnehmen kann; so ist das Visirinstrument leicht in einen Tubus zu verwandeln, der alsdann das Instrument zu Fernemessungen und zum Nivelliren besonders brauchbar macht.

Man könnte statt der Röhre zwar auch offene Dioptern anbringen; allein das Visiren mit den letztern ist so beschwerlich und unsicher, daß die erstere Vorrichtung allerdings den Vorzug verdient.

Zur

Zur Seite möchten etwa selbe als Sucher noch einen guten Platz finden.

§. 8.

Ursachen der Abänderungen des vorigen Instrumentes und die Abänderungen selbst.

Für die kurzen Distanzen, die der Markscheider gewöhnlich abzunehmen hat, ist ein so scharfes und kostbares Werkzeug, als das eben beschriebene, allerdings entbehrlich, ohne der unmgänglich erforderlichen Genauigkeit im mindesten zu nahe zu tretten.*) Ich habe daher dieses Instrument so abgeändert, daß es wohlfeiler zu stehen kömmt, dabey doch leicht zu dirigiren bleibt, und auch dem Markscheider über seine Arbeit, wenn er ihr die schuldige Aufmerksamkeit widmet, keine Vorwürfe zuzieht.

Der beschriebene Meßbock muß auch ihm, mit der für das vorige Instrument getroffenen Einrichtung als Stativ zugegeben werden.

Da

*) Wenn man diesem Instrumente den Vorwurf einer verwickelten Zusammensetzung machen will, so muß man die Schwierigkeiten der genauen Vermessung unter den gegebenen Umständen erwägen, auch bedenken, daß die leichte und sichere Behandlung dadurch nicht das mindeste verliere. — Daß es an nassen oder rolligen Stellen der Grube während dem Vermessen so gut als ein anderes Instrument von oben bedeckt werden müsse, leuchtet von selbst ein.

Da die Schrauben ohne Ende das vorgehende Instrument vorzüglich vertheuern, so müssen diese nothwendig weggelassen werden. Um jedoch die kleinen Bewegungen der Horizontalscheibe und des Gradbogens, die die meiste Genauigkeit geben, und aus freyer Hand nicht ohne Schwierigkeit und Zeitverlurst zu machen sind, durch die Maschine selbst wieder zu bewirken, habe ich folgenden einfachen Bau gewählt.

Die Einrichtung des Untertheiles bleibt bey diesem Instrumente bis an die Horizontalscheibe S in allen seinen Theilen ganz dieselbe, wie bey dem eben beschriebenen höschelschen Fig. 9.; nur ist die Horizontalscheibe S unmittelbar an der doppelten Büchse befestiget, und an selber das Stück MM, das hier eine andere Stelle und Gestalt bekömmt, dagegen weggelassen.

In der doppelten Büchse D Fig. 15. und folglich durch die Horizontalscheibe S wird der Vertikalaufsatz V mit einem dichten Zapfen beweglich eingesetzt. Der Vertikalaufsatz besteht aus dem Gradbogen G, der das bereits beschriebene Visirinstrument U trägt — aus dem Träger des Gradbogens V — einer auf einer schicklichen Stelle befestigten Wasserlibelle, oder einem an der Rückseite des Trägers angebrachten Senkel, den ich sogleich zergliedern werde — einem am Grunde des Trägers befindlichen Vernier oder Nonius und einem nach beyden entgegengesetzten Seiten in gerader

Linie

Linie auslaufenden Liniale M,*), das unten am Träger des Gradbogens V mit 2 oder 4 versenkten Schrauben gegenüber recht sicher auf eine beliebige Art festgemacht ist. Das eine Ende des Liniales reicht nur bis an die Theilung der Horizontalscheibe, und ist dort zu beyden Seiten aus der Mitte in einen Vernier von beliebiger Größe getheilt; am andern Ende auf ein Stück Messing geschraubet, das über die Dicke der Horizontalscheibe S herabgebogen ist, daselbst, um für den Hals der Mikrometerschraube einen Aufsatz aufzunehmen, etwas vorraget, und sodann die Horizontalscheibe von unten umfaßt.

Beyde Theile des Lineales liegen zur Verminderung der Reibung nur etwa $\frac{1}{2}$ Zoll um den Zapfen und mit den Enden auf der Horizontalscheibe auf. Unter dem unbeweglichen Lineale wird, ehe der Zapfen des Vertikalaufsatzes in die doppelte Büchse D gesetzt wird, ein bewegliches einschenklichtes Linial N**) eingelegt, daß sich an einem Ende um den gedachten Zapfen dreht, durchgehends leicht auf der Horizontalscheibe aufliegt, am andern Ende die eben erzählte Vorrichtung zur Aufnahme einer Schraube hat, d. i. über die Horizontalscheibe herabgebogen, etwas verlän-

*) Es würde aber wahrscheinlich bequemer seyn, wenn das andere Ende unter einem rechten Winkel von der rechten Hand aus an das eine Ende angestossen würde.

**) Die an den neuern Bordaschen Kreisen gewöhnliche Vorrichtung kann dieses Lineal ersetzen.

längert, und dann um die Scheibe gekröpft ist. Die untere Einbiegung ist hier mit einer Stellschraube n versehen. Beyde Ende dieser zwey Liniale werden mit einer Mikrometerschraube Q von der bereits beschriebenen Art zusammengehänget.

In diesem Instrumente schreitet die Theilung von der linken gegen die rechte Hand vor.

Wer die Horizontalscheibe S lieber mit dem Vertikalauffatze V in Verbindung lassen möchte, der muß das unbewegliche Linial MM entweder in entgegengesetzter Richtung oder unter einem rechten Winkel auf der doppelten Büchse befestigen. Beyde Enden des Linials MM werden der obern Fläche der Horizontalscheibe gleich gemacht, und das eine in einem Vernier getheilt, das andere aber für die Mikrometerschraube hergerichtet. Nur auf den Enden liegt die Horizontalscheibe auf. Das bewegliche Linial kann ober- oder unterhalb der Horizontalscheibe seyn; allemal wird es um die Horizontalscheibe gebogen, und unten mit einer Stellschraube, oben mit dem andern Theile für die Mikrometerschraube versehen.

Sämmtliche Stellschrauben drücken an unterlegte Federn. Die Theilung muß hier von der rechten Hand gegen die linke gehen.

Den Gradbogen G trägt nur eine, aber eine desto stärkere Stütze V. Am Grunde dieser Stütze be-

findet sich ein Vernier von beliebiger Theilung. Um die feinen Bewegungen, die ein Vernier erfodert, sicher und leicht zu machen, wird auch hier eine Mikrometerschraube angebracht. Man legt nämlich zwischen den Träger und den Gradbogen ein bewegliches Linial p ein, das sich um einen die Achse des Gradbogens umgreifenden Vorspruug der Stütze oder allenfalls auch um die Achse selbst dreht, den Gradbogen mit dem andern Ende umfaßt, uud am äußern Stücke der Krdpfung eine Stellschraube hat. Am Ende des Armes p ist ein Vorsprung angebracht, worin sich ein viereckigtes an den Kanten abgestumpftes Stück Messing an zwo Schrauben, wie bey den bessern Grubenkompaßen horizontal bewegt. Durch dieses viereckigte Stück ist ein Muttergewinde gebohrt, worinn die Mikrometerschraube P geht. Der Befestigungspunkt dieser Mikrometerschraube ruht auf dem Liniale M, und ist vergrößert in Fig. 16. im Aufrisse und Fig. 17. im Durchschnitte zergliedert. Die Schrauben, um welche sich das viereckigte Stück mit dem Muttergewinde dreht, gehen nämlich durch 2 in Falzen zwischen zwey Säulchen verschiebbare Klötzchen, und vermindern dadurch die Unbequemlichkeit, die der Winkel bey stärkern Schraubenrevolutionen veranlaßt.

Es kann auch der Arm p immer gerade herabhangen, wenn vom selben ein Zirkelsegment von gewisser Länge ausläuft, und an das Ende desselben die Krdpfung mit der Stellschraube angebracht wird.

Im innern oder vielleicht noch vortheilhafter am Ende des Armes p wird das Muttergewinde, das sich wie vorhin um zwo Schrauben dreht, für die Mikrometerschraube eingerichtet. Man sehe hierüber die Fig. 18. Es wäre gut, wenn längs der punktirten Linie ein zweyter Arm mit dem Zirkelsegmente verbunden würde. Bey dieser Einrichtung würde der Winkel durch die Schraubenrevolutionen nie beträchtlich geändert, und die Versetzung des Befestigungspunktes der Mikrometerschraube gegen das Ende des Liniales M möglich gemacht, folglich die Behandlung des Instrumentes ungemein erleichtert.

§. 9.

Nur etwas weniges von der Anwendung dieses Instrumentes.

Die Anwendung dieses Werkzeuges kann zwar, was die Hauptsache betrifft, schon aus §. 6. und 8. entnommen werden; jedoch will ich einige Nebenumstände, der Deutlichkeit wegen, kurz nachholen.

Wenn der Meßbock in Ordnung und das Visirinstrument darauf gesetzt ist; so wird vor allem der senkrechte Stand des Instrumentes berichtiget, und dann, wo es die Sache erfodert, in der bey der vorigen Schnur erhaltenen Richtung des Instrumentes, nach dem vorigen Punkte durch die Objectivdiopter zurückvisirt. Das Instrument wird dabey aus dem

Rau-

Rauhen mit freyer Hand gestellet, sogleich die Stellschraube a angezogen, hierauf die Stellschraube d geöffnet, und endlich die Stellung mit der Mikrometerschraube K vollendet. Nunmehr wird vorwärts visirt.

Es muß daher zuerst die Stellschraube d des Zapfens D geschlossen, und die der beyden Mikrometerschrauben, welche bisher fest gestellt waren, an der Horizontalscheibe und dem Gradbogen losgemacht, Horizontalscheibe und Gradbogen von freyer Hand aus dem Rauhen gestellt, dann müssen die zwo eben losgemachten Stellschrauben an der Horizontalscheibe und dem Gradbogen wieder angezogen, und zuletzt die feinen Stellungen der einen und des andern durch die Mikrometerschrauben in's Reine gebracht werden. Vor dem Gebrauche wird auch hier das Schmieren bestens empfohlen.

Es wird wenig fehlen, daß man durch dieses Instrument nicht alle jene Vortheile erhalte, welche das vorgehende gewährt. Wenn es darum zu thun wäre, so könnte man das Instrument mit eben dieser Vorrichtung alsogleich so herstellen, daß man die Winkel, wo nicht von Sekunde zu Sekunde doch von 15 zu 15 Sekunden genau abnehmen könnte; eine Schärfe, die in den meisten Fällen genug zu thun pflegt.

§. 10.

Beschreibung eines bessern Senkels.

Ich habe schon bey der Beschreibung des vorigen Instrumentes, und erst kurz wieder von einem Senkel

gesprochen, der in den meisten Fällen gute Dienste statt der gläsernen Libellen leisten möchte; er ist also gebaut:

An beyden Enden einer messingenen Röhre aabb Fig. 19. werden entweder mittels an den innern Flächen eingeschnittener Gewinde, oder mittels in einen Einsprung greifender versenkter Schrauben zween darauf passende Deckel cc und dd befestiget. Im ersten Falle haben der bequemern Behandlung wegen beyde Deckel einen vorspringenden Rand, im zweyten Falle bedarf ihn nur der untere, an welchem noch überdieß eine andere messingene Röhre eeff durch Löthen, oder auf andere Art sicher befestiget ist. Beyde Deckel haben genau in der Mitte eine Oeffnung; in die des obern Deckels wird eine mit einem feinen Löchelchen zur Aufnahme eines Seidenfadens senkrecht durchbohrte Schraube g eingeschraubt; die Oeffnung des untern Deckels ist etwas größer, damit der erwähnte Seidenfaden h h einigen Spielraum finde. Die an dem untern Deckel befestigte Röhre eeff wird nach ihrer ganzen Länge, den einzigen Unterrand ausgenommen, auf 4 Seiten gegenüber weitschichtig ausgeschnitten Fig. 19 B. Die Ausschnitte bedeckt ein hohler Glaszylinder, der gerade die Länge und den Durchmesser der Messingröhre eeff hat. Er, dieser Glaszylinder, kann über die messingene Röhre gekittet, oder nach Vorschrift der Zeichnung durch den angeschraubten dritten Deckel ii festgehalten werden. Die Absicht dieser Vorrichtung ist, daß die Beobachtung erleichtert, und die Einwirkung

der

der manchmal sehr lebhaften Gruben- und Tagluft aufgehoben werde. Auch der dritte Deckel ii hat in der Mitte eine Oeffnung, die aber rund oder viereckig seyn kann, und zur Aufnahme des Stiftes l dient. Mit den Lappen oder Stücken mm und nn wird das ganze Instrument an der dazu ausersehenen Stelle (z. B. an der Rückseite des Gradbogenträgers Fig. 15.) durch Schrauben befestiget. Die senkrechte Anfestigung wird durch die weiten Schlitzen in den Lappen und die dadurch möglich gemachte Verschiebung sehr erleichtert. —

Um dieses Vortheils auch bey runden Körpern, wenn dieses Werkzeug an selben angebracht werden soll, genießen zu können, muß die Stelle flach seyn, oder zuvor ein Körper mit einer flachen Seite angefestiget werden. In den letzten könnte man den Senkel zur Verwahrung seines Standes zum Theile einlassen.

Wenn der am oben abgeplatteten unten zugespitzten Senkel K befestigte Seidenfaden durch die Oeffnungen der beyden Deckel cc und dd, und die senkrechte Höhlung der Schraube g gezogen, und oben an der Schraube mit einem Knoten oder besser durch Umschlingen verwahrt ist, so muß die Spitze des Senkels, im rechten Stande des Instrumentes, hier wie bey allen Senkeln dieser Art genau auf die Spitze eines im Boden des Untersatzes, oder dem dritten Deckel ii angebrachten Stiftes l eintreffen, ohne ihn vollends zu berühren. Die Schraube g dienet dazu, der Spitze des Senkels den richtigen Abstand vom Stifte zu geben, und nach vollendetem Gebrauche, wenn es bey diesem Baue je

nothwendig seyn sollte, an die untere Fläche des mittlern Deckels dd mit der Abplattung anzudrücken.

Die bey der Verfertigung allenfalls eingeschlichenen kleinen Abweichungen vom senkrechten Stande zu korrigiren, können schon größtentheils die weiten Schlizzen der Lappen mm und nn dienen; zum Ueberflusse mag der Stift l Fig. 19. auf ein rundes oder viereckigtes Messingplättchen oo, das die vergrößerte Oeffnung des Deckels ii reichlich überdeckt, befestiget, und unter selbem in einem kleinen Zapfen s verlängert werden. Bevor der Deckel i an die Röhre e f angeschraubet wird, wird der Stift mit dem Zapfen durch die Oeffnung des Deckels und zugleich durch eine Schlitze eines andern viereckigten Messingplättchens pp, welches in zween Falzen qq in verkehrter Richtung mit der Schlitze beweglich ist, gesteckt, und die Vorrichtung mit einer am Zapfen s befindlichen Schraube rr festgestellt. In Fig. 19. A ist das Plättchen mit der Schlitze abgesondert und vergrößert dargestellt. Den Gebrauch derselben kennt Jedermann, der mit dergleichen Werkzeugen schon gearbeitet hat.

§. 11.

Zweckmäßige Vorrichtung der Visirobjekte in Gruben.

Ueber Tag geht das Visiren leicht; denn die Gegenstände sind von selbst beleuchtet, und können daher bald gefunden und gemessen werden. Allein nicht so

ist's

ist's in der Grube. Dort visiren zu können, muß man die Visirobjekte erst schaffen, und künstlich beleuchten. Es ist keine gemeine Aufgabe, diese Punkte so zu fixiren, daß beym Fortrücken der Vermessung durch ihre Wandelbarkeit kein Versehen einschleiche; sie so darzustellen, daß man sie scharf genug fassen könne. Im Grunde bleibt zwar nichts anders übrig, als Lichter aufzustellen; aber diese werden durch die Grubenwetter bald in die Länge gezogen, wodurch der Vertikalwinkel, — bald in die Breite gedrückt, oder hin und hergetrieben, wodurch der Horizontalwinkel von dem ächten sehr weit differiren kann. Sie unbedeckt als Visirgegenstand auszustellen, ist daher für die Richtigkeit des Zuges höchst gefährlich.

Ich glaube allen diesen Schwierigkeiten durch folgende Vorrichtung zur Zufriedenheit der Markscheider abgeholfen zu haben.

Ein messingener Träger Fig. 20 und 21 wird an einem Ende A dergestallt ausgehöhlt, daß er genau auf den Zapfen g Fig. 8. paßt. Um ihn auf diesem Zapfen feststellen zu können, ist die Schraube a angebracht. Auf dem andern Ende B sitzt unterstützt durch einen horizontalen und einen schrägen Arm bb und c eine Art Blendlaterne C, die so weit aus dem Mittelpunkte zurückgerückt ist, daß der senkrechte Stift dd genau aus diesem Mittelpunkte des Trägers aufsteigen kann. An dem Stifte dd kann ein mit einer Hülse versehener Querarm ee Fig. 21. von gleicher Dicke auf- und abgeschoben,

und

und nach erreichtem Endzwecke mit einer kleinen Stellschraube f festgestellt werden. Der Endzweck dieses verschiebbaren Armes ist, nun mit seiner Beyhülfe, wenn er mit der Diopter des Visirrohres in dieselbe Horizontalebne gestellt ist, den Vertikalwinkel scharf und zuverlässig abnehmen zu können; wie entgegen der senkrechte Stift dd deßwegen genau in dem Mittelpunkte aufgerichtet wurde, um den Horizontalwinkel allemal richtig zu bekommen, wenn auch die Blendlaterne auf dem Meßbocke gegen das Instrument hin etwas abgewendet aufgesetzt seyn sollte. Jede Verletzung der Enden sowohl des Stiftes dd als des Querarmes ee abzuwenden, sind selbe mit Bedeckungen gesichert.

Die Laterne ist in der Gegend dieser Vorrichtung flach gedrückt und geräumig ausgeschnitten; der Ausschnitt aber mit einem Glase bedeckt. Wer den Schein des Lichtes scheut, nimmt gefärbtes Glas. Durch die rückwärts angebrachte Oeffnung, die mit einem Thürchen geschlossen werden kann, wird eine gut verwahrte Oel- oder Unschlittlampe g auf einen eigens dazu zubereiteten Platz eingeschoben. Durch den Boden der Laterne sind neben der Lampe 2 und durch die Decke eine Oeffnung gebrochen, um die Lampe brennend zu erhalten.

Die vertikale Stellung wird der Lampe durch die 2 Scharnieren des Säulchens g (Fig. 8.) gegeben; eine schärfere Bestimmung wäre zwar besser, würde aber das Instrument auch kostbarer machen. Damit

man

man diese Operation mit Zuverlässigkeit vornehmen könne, ist an der Blende ein Senkel, wie ich ihn beschrieben habe, beygefügt; in der Gegend des gläsernen Zylinders h (Fig. 21.) ist die Blende durchbrochen, wodurch das Licht der Lampe den Senkel zugleich beleuchtet.

Ein Senkel, der an einer Schnur an der Vorderseite der Lampe längs der Vertikallinie des Kreutzes auf die gespannte Schnur herabgelassen würde, möchte wahrscheinlich in Verbindung mit dem befestigten Senkel noch mehr Genauigkeit gewähren.

Schwerlich wird eine andere Angabe die gegenwärtige an Sicherheit und Bequemlichkeit übertreffen. Da der Meßbock, gegen welchen rückwärts visirt wird, hier noch unverrückt ist, und derjenige, gegen welchen vorwärts visirt werden soll, unbewegt bleibt, bis die folgende Schnur abgenommen ist; so sind die Visirpunkte gewiß als fix zu betrachten, und zur Sicherheit und Erleichterung der Arbeit vollkommen geeignet. — Die Zeit, welche alle dergleichen Instrumente wegen dem Rückwärtsvisiren besonders fordern, wird man dem gegenwärtigen wohl nicht individuell zu Last legen? — Beym Verschnüren sind 2 dergleichen Instrumente nöthig, die ich im Verfolge Visirobjekte nennen werde.

§. 12.

§. 12.

Vorschläge zur Untersuchung jener Instrumente.

Gewöhnlich werden zwar die mathematischen Instrumente von dem Mechaniker schon vor der Versendung untersucht und berichtiget; allein da dieses doch nicht allemal geschieht, die Instrumente bey der Versendung zuweilen leiden, und selbst im Gebrauche manchmal unglücklicher Weise Schaden nehmen: so ist es doch immer sehr ersprießlich, wenn man selbe untersuchen und dadurch unwillkührlichen Fehlern vorbeugen kann.

Nicht nur neue Instrumente sollen daher einer scharfen Untersuchung beym Empfange unterworfen, sondern auch alte von Zeit zu Zeit vor dem Gebrauche wieder geprüft werden.

Selten findet man in theoretischen Schriften eine Methode, wie man bey dieser Operation zu Werke gehen soll; ich will deßwegen eine leichte und zuverlässige nur kurz beschreiben.

I. Den richtigen Stand der Libelle prüfe ich also:

Nachdem das Instrument, vielmehr die Libelle auf der Stelle A Fig. 6. über dem Stative genau horizontal gestellt ist, so visire ich auf ein senkrecht gestelltes verschiebbares Zeichen, und rücke dieses so lange bis es die Horizontallinie der Objektivdiopter genau

in

in der Mitte oder einem andern bezeichneten Punkte durchschneidet.

Hierauf messe ich die Höhe des Instrumentes bis an die gedachte Horizontallinie, und so auch die Höhe des Punktes, nach welchem ich visirt habe, gehe dann mit dem Instrumente nach B und stecke das Zeichen in A auf, stelle das Instrument wieder horizontal, messe abermal dessen Höhe, addire oder subtrahire die Plus- oder Minusdifferenz zwischen dem dermaligen Stand des Instrumentes und dem ehemaligen des Visirzeichens auf eben diesem Platze zu- oder von der ehemaligen Höhe des Instrumentes in A, und rücke das nun in A stehende Visirzeichen genau auf diese Höhe. Wenn die Libelle richtig horizontal gestellt ist, so muß die Horizontallinie der Objektivdiopter das Visirzeichen genau auf demselben Punkte durchschneiden, außerdem ist die Libelle mit dem Instrumente nicht im horizontalen Stande.

Ohne weiter auf die Libelle Rücksicht zu nehmen, stelle ich jetzt die Diopterröhre scharf nach dem bestimmten Visirpunkte, öffne die kleine Stellschraube g Fig. 14. und drücke oder erhebe durch Umdrehungen der großen Stellschraube f die Libelle so lange bis die Luftblase den horizontalen Stand derselben anzeigt.

Ich will das Verfahren ein Bischen deutlicher machen.

Gesetzt das Instrument hätte in A von der Erde bis an die Horizontallinie der Objektivdiopter, nachdem es horizontal gestellt ist, 5′ $7\frac{3}{4}$″ und das Visirzeichen in B nach dem Visiren 5′ $2\frac{1}{2}$″ gemessen. Betrüge die Höhe des Instrumentes nach seiner Versetzung und Horizontalstellung in B 5′ $4\frac{1}{4}$″, so stünde es um $1\frac{3}{4}$″ höher, als vorhin das Visirinstrument auf eben diesem Orte gestanden ist; das Visirzeichen müßte daher in A ebenfalls um $1\frac{3}{4}$″ höher als ehedem das Instrument daselbst stand, also auf 5′ $9\frac{1}{2}$″ hochgerückt werden. — Mäße das Instrument hingegen in B nur 5′ $1\frac{1}{2}$″, so wäre es um $2\frac{3}{4}$″ niedriger als das Visirzeichen, weßwegen dieses in A ebenfalls um $2\frac{3}{4}$″ niedriger als ehedem das Instrument, nämlich auf 5′ 5″ herabgerückt werden müßte. — Der Abstand kann am zuverläßigsten durch Hülfe eines am Stative gut angebrachten Senkels gemessen werden; ich habe deßwegen einen zwischen den Schenkeln des Statives eingehangen. Das Maaß des Obertheiles ist ohnehin bekannt, oder leicht zu bestimmen.

Um von der Richtigkeit der Operation versichert zu seyn, wiederhole ich unter den vorgeschriebenen Regeln die Verwechslung der Standörter zwey- auch dreymal, und wähle vor allen zu dem ganzen Geschäfte so weite Distanzen, als mein Auge und der Raum nur immer gestattet; und dann wieder sehr nahe Punkte.

II. Ob sich der Gradbogen (oder Vertikalbogen) in einer Vertikalebene bewege, zu finden,

lasse ich bey windstillem Wetter von irgend einem hohen Punkte, z. B. einem Thurme eine Schnur herabfallen, die ich mit einem hinlänglichen Gewichte straff anspanne. Nun setze ich mein Instrument in einer bestimmten Entfernung dieser Schnur gegenüber mit dem Stative auf, stelle es genau horizontal, und visire in dieser Stellung nach der gespannten Schnur. Es versteht sich, daß die Libelle vorher untersucht und scharf horizontal gestellt seyn muß. Ohne die Horizontalscheibe S im mindesten zu verrücken, neige oder erhebe ich alsdann den Vertikalbogen G um eine beliebige Anzahl Grade, und visire abermals nach der Schnur. Trift diese noch genau mit der perpendikulären Linie der Kreutzlinien in der Objektivdiopter α ein, so neige oder erhebe ich den Grad- oder Vertikalbogen noch mehr, bis ich endlich von seinem vertikalen Stande versichert bin. Wenn sich aber eine Abweichung zeiget, wende ich die Horizontalscheibe mit der Schraube ohne Ende K solange, bis die senkrechte Linie der Diopter wieder auf die Schnur einfällt — zähle die Grade und Minuten der Abweichung, und fahre damit von Grad zu Grad oder von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 Graden durch den ganzen Gradbogen fort. Ich habe schon gesagt, daß ich mein Instrument in einer bestimmten, d. i. scharf gemessenen Entfernung aufstelle. Dadurch erhalte ich, wenn das Instrument selbst die nöthige Verbesserung nicht zuläßt, wenigstens eine Tabelle, mit deren

Beyhülfe ich für alle Fälle die korrespondirende Abweichung leicht berechnen kann. Ich glaube, daß hierüber mehr zu sagen unnöthig sey.

III. Um zu erfahren,

ob die Schraube ohne Ende des Höschelschen Scheibeninstrumentes die Minuten des Horizontal- und Vertikalwinkels gehörig angebe,

bleibt nichts anders übrig, als nach einem gewählten beträchtlich großen Zirkel z. B. von 30 oder 60 Fuß Radius auf ein als Segment gebogenes Bret, oder einen andern Körper einige Grade von 5 zu 5 oder 10 10 Minuten richtig zu verzeichnen, und hierauf den Erfolg der Schraubenrevolutionen auf dem Cadran zu vergleichen. Zur Erleichterung der Uebersicht kann man je 5 und 5 Minutenpunkte in einer schrägen Richtung wie die Noten auf 6 Linien übereinander hinreichen. Die gefundenen Abweichungen müssen, wenn sie im Instrumente nicht zurecht gesetzt werden können, gleichfalls in eine Tabelle gebracht werden. Die Stellung des Bretes und Verbindung der durchgegangenen Theile bey jeder Art der Untersuchung lehrt die Erfahrung, wenn es je erst auf sie ankommen sollte; auch die Weise, jene Theilung zu veranstalten, glaube ich vorauszusetzen zu dürfen.

Ob der Vernier des abgeänderten Scheibeninstrumentes die Minuten richtig zeige, dienet dieselbe Vorrichtung vortreflich. Ist der Vernier nach beyden Seiten (wie z. B. beym Vertikalbogen) getheilt,

so

so addire ich noch überdieß die beyderseits abgeschnittenen Minuten; wenn die Summe nicht Grad für Grad genau einen Grad ausmacht, so ist die eine oder die andere Theilung fehlerhaft.

Die Theilung der Horizontalscheibe und des Gradbogens auch des Cadrans untersuche ich auf folgende bekannte Art:

Ich fasse mit den scharfen Spitzen eines guten Zirkels z. B. 5 oder 10 Grade, umschreite die Peripherie auf diese Art aus jedem Grade insbesondere, und bemerke genau, ob die Spitzen allzeit richtig in die Theilung eintreffen. Ist sie mangelhaft, so muß ich mir, oder wenn ich's nicht will oder kann, durch Jemanden andern, der erprobte Geschicklichkeit besitzt, eine spezifische Tabelle über den Betrag der Mängel von Grad zu Grad entwerfen lassen, oder das Instrument gleichwohl wieder zurücksenden. Bey dieser Untersuchung muß man sich vorzüglich hüten, daß keine Selbsttäuschung unvermerkt unterlaufe; dieß kann sich gar leicht ereignen, wenn man mit den Zirkelspitzen nur wenige Grade faßt.

IV. Wenn das Instrument vollkommen horizontal gestellt und die Theilung richtig oder doch bestimmt ist, so ist leicht zu untersuchen, ob die beyden Diopter des Visirrohres, nämlich diejenige zum Vorwärts- mit jener zum Rückwärtsvisiren in Eine Vertikalebene falle. Man visire durch die eine Diopter (B) scharf nach einer perpendikulär gespannten Schnur,

bemerke genau die auf der Horizontalscheibe s abgeschnittenen Theile (Grade und Minuten), drehe hierauf den Vertikalaufsatz bey Justirung des Instrumentes Fig. 9. sammt der Scheibe S, bey Berichtigung des Instrumentes Fig. 15. aber sammt dem Liniale M herum, und visire wieder durch die Diopter α. Betragen die nunmehr abgeschnittenen Theile gegen die ersten richtig 180 Grade, so sind die zwo Dioptern in Einer Vertikalebene. Die Abweichung kann durch die Stellschrauben α β leicht berichtiget werden. — Am sichersten geht man hiebey, wenn man den Vertikalbogen G unverrückt läßt.

V. Ob der Zapfen des Gradbogenträgers sich genau im Mittelpunkte der Horizontalscheibe bewege, zeiget sich:

Wenn ich mir zween feste Punkte absteckе, und aus einem genommenen Standorte durch mehrere Grade der Horizontalscheibe den Winkel, den jene Punkte mit meinem Standorte machen, untersuche. Bleibt der Winkel sich überall gleich, so kann ich dafür bürgen, daß das Instrument richtig gebaut ist.

Ich wähle zu meiner Sicherheit hiebey wechselsweise erst einen spitzigen, dann einen stumpfen Winkel, oder umgekehrt. Ueberdieß behalte ich den Gradbogen immer in der nämlichen (horizontalen) Stellung, und sehe auch darauf, den Abstand zwischen den Punkten und Standorten so viel möglich zu verlängern. Ist die

Thei-

Theilung der Horizontalscheibe fehlerhaft und vorher nicht berichtiget, so wird sich dieser Umstand hier auch unbeabsichtet äußern; aber eben deßwegen muß ich mich hüten, die Ursache der Abweichung nicht am unrechten Orte zu suchen, und die Fehler nicht selbst zu vervielfältigen.

Eigentlich finde ich durch diese Manipulation, ob sich die Horizontalscheibe S mit dem hohlen Zapfen D (Fig. 9.) oder das Lineal M M mit selbem (Fig. 15.) um den Mittelpunkt dreht; habe ich aber dieses gefunden, so darf ich nur mehrere Punkte nach der ganzen Peripherie abstecken und dadurch bestimmen; und nun die Winkel, während itzt die Horizontalscheibe unbewegt bleibt, durch Wendung des Visirrohres wieder abnehmen, so ist die Aufgabe gelöset.

VI. Ob die Achse des Visirrohres genau in den Diameter der Horizontalscheibe, und die Mitte des Verniers auf dem Lineale — oder dieselbe Vertikalebene einfalle, verdient nur für den Fall untersucht zu werden, wenn man bald durch die Dioptер α, bald durch β vorwärts visiren wollte, oder müßte, und zeiget sich:

Wenn ich aus einem nahen Standpunkte, nachdem ich von dem richtigen Stande der Libelle des Gradbogens und der Dioptern versichert bin, gegen eine straff angespannte feine Schnur erst durch die eine, dann durch die andere Dioptер scharf visire, und jedesmal die abgeschnittenen Grade und Minuten bemerke. Beträgt die

Dif-

Differenz genau 180 Grade, so ist das Instrument in dieser Rücksicht fehlerlos; weiset sich aber eine Abweichung, so muß selbe bey jedem Winkel addiret, oder subtrahiret werden, woferne das Instrument nicht verbessert werden kann.

VII. Wer sich mit Justirung dieser und anderer Instrumente viel abgeben muß, wird sich leicht eine sehr bequeme Vorrichtung erfinden, deren Beschreibung weiter unten bey einer schicklichern Gelegenheit folgen wird.

VIII. Den Querarm e e des Visirobjektes Fig. 21. in die nämliche Horizontalebene mit der Querlinie der Diopter des Meßinstrumentes zu bringen, ist hinreichend, blos das Meßinstrument, desselben Visirrohr und das Visirobjekt auf einer Horizontalfläche vollkommen horizontal zu stellen, durch das Visirrohr nach dem letzten zu visiren, und hier den Querarm so lange zu verrücken, bis er von der Querlinie des Visirrohres gedeckt wird. Oder man verfahre, wie bey der Berichtigung der Libelle gezeigt wurde.

Der vertikale Stift d d Fig. 20. und 21. muß ohnehin, wenn je das Instrument richtig horizontal gestellt ist, unter jeder Wendung der Laterne mit der vertikalen Linie der Diopter zusammen treffen.

IX. Den Stand des Senkels am Visirobjekte zu prüfen und zu berichtigen,

wird selber sammt dem Instrumente auf ein vorher horizontal gestelltes Stativ aufgesetzt, oder das Instrument durch den Senkel selbst horizontal gestellt. Zeiget der Senkel Abweichungen, wenn das Instrument nach einer andern Seite gekehrt wird, so ist dieser vor allem vom Instrumente abzunehmen, und nach der gewöhnlichen Art zu untersuchen, ob er richtig gestellet sey. Man setzet ihn nämlich mit dem Theile ii Fig. 19. auf eine in der Mitte durchbrochene Horizontalfläche, und wendet ihn, und verschiebt dabey den Stift l so lange, bis Stift und Senkelspitzen k gleichförmig einfallen. Wird der Senkel nunmehr am Instrumente befestiget, und dieses auf das vorher horizontal gestellte Stativ (es sey ein Meßbock, oder was immer) gebracht, so kann er, wenn das Gehäuse des Senkels und der Laterne richtig gebaut ist, nur mehr nach den beyden Richtungen m m abweichen. Man wendet daher das Gehäuse des Stiftes mit den Stücken m m und n n, um die durch selbe gehenden Schrauben, bis die Aufgabe gelöset ist. — Die Neigung des Senkels, gegen die Laterne des Visirobjektes, oder von dieser kann nur durch eine Unterlage bey m m oder n n verbessert werden.

Allgemeine Anmerkung.

Alle diese Untersuchungen müssen von einer Aenderung im Instrumente mit der größten Aufmerksamkeit

und Genauigkeit vorgenommen, und öfter wiederholet werden, da es sich bey alle dem leicht fügen kann, daß man sich selbst betrüge.

§. 13.

Eine Vorrichtung das Rückvisiren zu beseitigen.

Das Rückvisiren, ob es gleich bey dergleichen Meßinstrumenten unvermeidlich ist, hat besonders in den Grubengebäuden so viele Unbequemlichkeiten, daß es der Mühe verlohnt, darüber nachzusinnen, wie man selbes beseitigen könnte. Man denke nur, wie leicht ein Fehler einschleichen kann! Wie schwer das Rückvisiren in Grüben ist! Wir sauer es wird, die Meßböcke übereinander wegzuheben! u. s. w. Ich wage es hier in dieser Absicht, einen Vorschlag zu machen, der, so einfach er ist, doch sehr viel zu versprechen scheint. Am leichtesten kömmt man auf folgende Weise davon.

Bevor das Meßinstrument, oder Visirobjekt auf dem Zapfen g Fig. 8. gestellt wird, schiebe man an selben ein etwa 1 Zoll hohes Untersätzchen A Fig. 22. Dieß Untersätzchen ist seitwärts mit einer starken Stellschraube *) a versehen, die an ein federhart ge-

häm-

*) Vielleicht möchten zwo gegenüberstehende Schrauben noch vortheilhafter seyn; gewiß geben sie mehr Befestigung.

hämmertes Gehäuse von Messing drückt, und dadurch einen sichern Stand erhält; an dem obern Rande desselben aber ragen zwo beliebige Erhöhungen ß ß empor, deren Haupteigenschaft darin besteht, daß sich das darüber gesetzte Instrument leicht abheben läßt, wenn man dieß nach vollendeter Operation wegnehmen muß. In den untern Rand des hohlen Zapfens A des Meßinstrumentes Fig. 9. und D des Visierobjektes Fig. 23. und 24. werden zwo mit den Erhöhungen des Untersätzchens genau korrespondirende Vertiefungen eingesenket, so daß jedes derselben, welches immer wechselsweise darauf gestellt wird, also sowohl das Meßinstrument als das Visirobjekt vollkommen die nämliche Richtung hat, d. i. denselben Winkel weiset. Damit aber diese Vorrichtnng von Nutzen sey, muß dem Visirobjekte eine andere Gestalt gegeben werden.

Die Laterne Fig. 23. desselben wird nämlich bis auf ihre Mitte über den Träger A B hereingerückt; in der halben Höhe des Trägers ein Visirrohr x y von 12 bis 15 Zoll Länge mit einer gewöhnlichen Okular- und Objektivdiopter angebracht, der Träger endlich mit der Laterne und dem Visirrohre so verbunden, daß man den senkrechten Stift d d mit der senkrechten Linie des Visirrohres, und nachhin das Visirrohr des Visirobjektes mit dem des Meßinstrumentes bey ihrer gehörigen Stellung scharf in eine und dieselbe Vertikalebene bringen kann. Denn daß diese 3 Punkte in eine Vertikalebne fallen müssen, wenn die ganze Vorrichtung etwas taugen soll, erhellet aus der Sache

selbst. Am leichtesten bewirkt man das erste durch eine am obern Ende des Trägers eingerichtete Schraube mit einem Stifte i, um welchen die Laterne gedrehet — das letzte durch einen Zapfen 1 im Träger unterhalb dem Visirrohre, um welchen der Obertheil gewendet werden kann *). Eine Stellschraube K (allenfalls auch zwo) sperret, nachdem alles richtig gestellt ist, die Wendung, und ein über beyde Theile senkrecht herab laufender Strich sichert den gleichförmigen Stand, oder verräth doch dessen Verrückung.

Allein hier ist die Zuverlässigkeit und Genauigkeit noch sehr gefährdet; ich ziehe daher folgende, obgleich etwas kostspieligere Abänderung wegen ihrer Bestimmtheit vor.

Das Meßinstrument Fig. 9. wird so eingerichtet, daß dessen Untertheil beym Anfange oder unterm Ende der Büchse D nicht mehr mit dem Obertheile unmittelbar zusammenhängt. Dagegen raget entweder der Zapfen, womit die Kugel y der Nuß Fig. 10. verbunden ist, über die Oberfläche der Platte C beyläufig einen halben Zoll hervor, oder es wird auf dieser Platte C genau im Mittelpunkte ein einen halben Zoll dickes genau rund abgedrehtes Plättchen aufgeschraubt. Um dieß Plättchen wendet sich ein anderes von gleicher Dicke, das die dreyeckichte Gestalt von γγγ hat, und mit dem Arme T verbunden ist. Wenn die 3 Schrau-

*) Diese Vorrichtungen besonders zu zeichnen, scheint unnöthig.

Schrauben ccc nach der 2ten Anmerkung zu §. 5. von unten durch die Platte B eingerichtet werden, so kann die Platte γγγ die Größe von C bekommen. An jeden der 3 Enden hat die Platte γγγ ein senkrecht ausgebohrtes Loch, und ein größeres hat in der Mitte das zirkelrunde Plättchen, um welches sich γγγ dreht. Die Mikrometerschraube K behält ihren vorigen Bau, und wird mit der Platte C und der eben erwähnten Platte γγγ verbunden. An dem untern Rande der Büchse D, vielmehr dem Theil γγγ wird eine mit der bisher beschriebenen Platte γγγ gleich groß aufgeschraubt, d. i. die Platte γγγ der Fig. 9. wird ebenfalls so groß als C gemacht, wodurch also zwo ganz gleiche Platten γγγ entstehen. An jedem Ende dieser obern Platte ist abwärts ein mit den 3 erwähnten senkrechten Löchern genau korrespondirender Zapfen befestiget, und in der Mitte ist ein vierter, der in jenes größere paßt. Die 3 Zapfen können auf eine beliebige Art in den Höhlungen festgestellt werden. Die Büchse D darf nun bloß ein hohler Zapfen seyn; doch gewährt die Büchse den Vortheil, daß man das Instrument auch mit Rückvisiren brauchen kann.

Ein anderer Untertheil ganz von demselben Baue, wie ich ihn so eben beschrieben habe, ist aber auch für das Visirobjekt Fig. 23. und 24. nothwendig. Es muß daher der Fuß D seines Trägers, anstatt der Höhlung für den Zapfen gg Fig. 8. ebenfalls mit einer dreyeckichten Platte γγγ, und diese mit dem in die 3 senk-

recht gebohrten Löcher und die mittlere Höhlung einfallenden Zapfen versehen werden. Dadurch scheinen freylich die Unkosten zu wachsen; allein es wird zugleich ein Visirobjekt erspart, das nicht viel wohlfeiler zu stehen kommen mag. Da hingegen jeder Untertheil auf seinem Meßbocke sitzen bleibt, und die Stellung des Visirobjektes pünktlicher geschehen kann, so soll nach meiner Meinung der Gewinnst an Zeit und Genauigkeit die Auslage ersetzen.

Auf der obern Platte yyy des Meßinstrumentes sowohl als des Visirobjektes kann eine Libelle stehen.

§. 14.

Recktifizirung der Vorrichtung das Rückvisiren zu beseitigen.

Die Recktifizirung des Meßinstrumentes selbst darf nunmehr wohl vorausgesetzt werden, da sie gegen die §. 12. bereits beschriebene nichts besonders fodert.

Eben so ist die Berichtigung des Senkels, wenn dieser der Libelle vorgezogen wurde, aus dem Vorgehenden bekannt. Es kömmt gegenwärtig also nur darauf an, das Visirobjekt in Ordnung zu bringen. Man kann dabey ohngefähr auf folgende Weise verfahren.

Wenn dem Visirobjekte kein solcher Untertheil, wie er bey dem Meßinstrumente ist, beygegeben wurde, so stelle man den Zapfen gg Fig. 8. auf dem Meßbocke B vor-

Fig. 6., worauf das Visirobjekt stehen soll, gleichwohl durch einen daran ohnehin angebrachten Senkel nach Möglichkeit horizontal. Eben so verfahre man mit dem Meßbocke A, der das Meßinstrument tragen wird. Nun stecke man die Untersätzchen A Fig. 22. an die Zapfen, und darüber das Visirobjekt auf dem einen Meßbocke A und visire durch das Visirrohr nach dem Zapfen g des andern Meßbockes B so, daß ihn die senkrechte Kreuzlinie in der Mitte durchschneide; dann ziehe man die Stellschraube des Untersätzchens an. Ist dieses in Ordnung, so hebe man das Visirobjekt ab, setze das Meßinstrument auf den Zapfen seines Meßbockes B, visire nach dem Zapfen A, worauf vorher das Visirobjekt stand, und ziehe die Stellschraube ebenfalls an. Schneidet die senkrechte Linie in dem Visirrohre des Visirobjektes, von dem Zapfen B des Meßinstrumentes visirt, den Zapfen A, worauf das Objekt vorher aufgesetzt war, wieder in der Mitte; oder erfolgt dieß bey der nemlichen Versetzung des Meßinstrumentes, so steht das Visirrohr des Objektes gut — wo nicht, so muß durch das bereits angegebene Mittel (§. 13.) geholfen werden.

Wenn auf jedem Meßbocke ein Untertheil, wie er zum Meßinstrumente gehört, aufgesetzt wird, so bleibt das Verfahren das nämliche; nur wird jeder Untertheil sogleich auf seinen Stand gebracht, und für sich horizontal gestellet.

Der Vorzug dieser Einrichtung ist, daß man jeden Fehler geschwind und leicht am rechten Orte entdecket.

Jetzt

Jetzt visire man nach dem Stifte d der Laterne (Fig. 23. und 24.); trift die senkrechte Linie des Visirrohres im Meßinstrumente genau auf selben, so passen alle Theile gehörig zusammen; im entgegengesetzten Falle muß die Laterne um ihren Mittelpunkt so lange gewendet werden, bis die senkrechte Linie des unverrückt gebliebenen Visirrohres auf den Stift einfällt.

Die Stellung des Querarmes e Fig. 24. erhellet aus §. 11. 12. und 13. deutlich genug.

§. 15.

Vermessung mit Diopterinstrumenten ohne Rückvisirung.

Wenn die zween Meßböcke A und B (Fig. 6.) an ihre bestimmten Plätze gestellet sind, und die Schnur angespannt ist, so wird auf B das Visirobjekt sammt dem Untersätzchen oder Untertheile gesetzt, und durch dessen Visirrohr, nach verrichteter Horizontalstellung, gegen den ebenfalls horizontal gestellten Zapfen des Meßbockes A visirt, bis, wie erinnert wurde, die senkrechte Diopternlinie, diesen Zapfen in der Mitte durchschneidet. Hierauf wird der Untersatz mit der Stellschraube befestiget. Bey der ersten Schnur, wenn selbe auch nach einem vorläufig gegebenen Winkel abgenommen werden muß, ist es unnöthig, das Meßinstrument aufzusetzen. Der Meßbock A wird daher sogleich auf die Stelle C gebracht, das Visirobjekt von B ohne das Untersätzchen abgenommen, und auf den Meßbock

in

in C über den Untersätzchen übersetzt; nach vollbrachter Horizontalstellung wird, wie vorhin von B nach A, jetzt von C nach B visirt, das Untersätzchen in C angezogen, und endlich das Meßinstrument, nachdem es auf den verlangten Winkel gestellt ist, auf das Untersätzchen in B gebracht. Es ist offenbar, daß das Meßinstrument auf der Stelle in der Lage der Linie A B und horizontal seyn muß. Wird durch das Visirrohr des Meßinstrumentes nach C visirt, so muß sich der Winkel der Linien BC eben so heraus werfen, als wenn er vorher zurückvisirt worden wäre. Auf diese Art wird von dem folgenden Meßbocke immer auf den Zapfen des vorgehenden durch das Visirrohr des Objektes visirt, das Untersätzchen des Objektes zum bleibenden Anhaltspunkte befestiget; dann durch das Visirrohr des Meßinstrumentes ohne Verrückung des Untersätzchens vorwärts nach dem Objekte visirt, Horizontal- und Vertikalwinkel abgenommen und eingetragen, und nun wieder fortgefahren.

Es gehört wahrlich keine tiefe Einsicht in die praktische Geometrie dazu, um zu begreifen, daß durch diese Vorrichtung, wenn sie gehörig vervollkommnet wird, die Genauigkeit nicht verlieren könne, und das Geschäft sehr beschleuniget werden müsse. Die Mühe, welche auf die genaue Horizontalstellnng und Richtung des Visirobjektes verwendet werden muß, könnte vielleicht Bedenklichkeiten verursachen; allein da das Meßinstrument bey seiner Uebersetzung dadurch schon horizontal, und in den richtigen Winkel gestellet ist, und

das

das Visirobjekt auf alle Fälle, wenn die Operation nicht unrichtig werden soll, die scharfe Horizontalstellung fodert, so ist dieser Mühe- und Zeitverlust wieder vollständig vergolten.

In der Grube wird der Zapfen, nach welchem vom Visirobjekte aus visiret werden muß, durch das rückwärts angehaltene Licht beleuchtet, welches man ohnehin zur Beobachtung des Meßinstrumentes bedarf.

§. 16.

Fernere Anwendung der Vorrichtung ohne Rückvisiren zu messen.

Bey Vermessungen, wo die Kette oder Schnur gar nicht gebraucht, oder nicht am Stative selbst angespannt wird, und bey manchen andern Veranlassungen wird folgende Abänderung, ohne Rückvisiren zu messen, bessere Dienste leisten.

An einem viereckigten Rohre, in welchem ein viereckigter genau einpassender Stab auf- und niedergeht, werden beym obern Ende drey Füße, wie sie bey den Stativen der Meßinstrumente gewöhnlich sind, angefertiget. Das freye oder obere Ende des viereckigten Stabes wird mit einem Zapfen, wie der in Fig. 8. gebildet ist, oder einer andern diesen Absichten entsprechenden Vorrichtung versehen; der übrige Theil wird seiner Länge nach in Zolle getheilt. An dem Rohre befindet sich eine Stellschraube, den Stab in jeder be-

lie-

liebigen Höhe, damit festzuhalten. Der Erfolg wird zeigen, daß das Rohr und der darinn steckende Stab die Länge der Füße nicht haben dürfe.

Mit diesem Werkzeuge zu messen, muß man sich wieder zwey ganz gleiche Stücke anschaffen; die Operation bleibt im übrigen dieselbe, wie mit den Meßböcken, sobald die beyden Stäbe bis an die Basis der darauf befestigten Zapfen in gleiche Entfernung von der Oberfläche der Erde gerückt sind. Wie dieses am zuverlässigsten geschehe, habe ich bereits gezeigt.

Große Entfernungen machen ein größeres Visirobjekt, und in jedem Visirrohre einen Tubus nothwendig.

Diese Vorrichtung ist es auch, die bey der Rectifizirung der Meßinstrumente mit vorzüglichem Nutzen angewandt werden kann.

§. 17.

Vorschläge zur Beseitigung einiger Mängel jener Instrumente.

Ich kann es nicht verhehlen, daß dem einen, wie dem andern der beschriebenen Instrumente noch einige nicht unbedeutende Unvollkommenheiten ankleben, die freylich über Tag selten oder nie merklich werden, aber bey unterirdischen Vermessungen oft genug Hindernisse veranlassen, um Erwägung zu verdienen. Ich will

jene,

jene, die ich kenne, hier anführen, und Mittel dagegen vorschlagen.

Es ist sehr schwer oder fast unmöglich mit diesen Instrumenten auf gewöhnliche Art jene große Vertikalwinkel aufzunehmen, die in den Grubengebäuden (z. B. bey flachen Schächten, Rollen oder Gesenken) vorkommen. Indessen glaube ich, daß diesem Uebel durch folgenden Kunstgriff, wenn auch mit etwas mehr Mühe, abgeholfen werden könne.

Gesetzt es müßte die Rolle a b c d (Fig. 25.) vermessen werden. Zuerst sehe ich mich nach Beschaffenheit des Lokales vor, daß ich den Meßbock, ich habe nun den größern oder kleinern gewählt, auf jeder Stelle so setze, und überhaupt so verfahre, damit er selbst in der Abnahme des Winkels nicht hindern, und bey der Spannung der Schnur nicht weichen, also die Arbeit nicht unrichtig machen könne. Ich setze dann das Meßinstrument bey a auf den Meßbock, und richte es in den Winkel der Linie ax.

Nun wende ich die Sehröhre gegen b, erhöhe den Vertikalbogen G G Fig. 9. um 45 Grade, und neige endlich vermittels der Scharnieren bb Fig. 8. den horizontalen Kreis S ebenfalls um 45 Grade, das ist, so lange abwärts, bis die Libelle L, also auch die damit verbundene Sehröhre wieder in die horizontale Lage kömmt.

Da durch die Bewegungen gewöhnlich der Bogen G G aus der vertikalen Lage gebracht wird, so wird

solche auf folgende Art wieder hergestellt: Man bemerke bey dieser ersten Stellung am Rande S die Grade, bringe den Bogen GG auf zero, und drehe nun den ganzen Aufsatz, während die Scheibe S unverrückt bleibt, um 90 Grade vorwärts. Ist nun die Libelle in dieser zweyten Stellung horizontal, so liegt der Bogen GG noch unverrückt in seiner vertikalen Ebene; im Gegentheile muß selbe vermittels der Schrauben ccc wieder hergestellt werden. Dann wird GG wieder um 45 Grade erhoben, der Aufsatz auf die vorige erste Lage wieder zurück geführt, und auf ähnliche Art fortgefahren, bis sowohl bey der ersten als zweyten Stellung die Libelle die horizontale Lage behält.

Dieser Arbeit ist freylich bey dem gegenwärtigen Baue des Instrumentes etwas mühsam; würde aber im rechten Winkel mit der Richtung des Visirrohres U Fig. 9. und Fig. 15. am Grunde des Vertikalaufsatzes oder über der Horizontalscheibe S noch eine Libelle angebracht, so wäre das Instrument nicht nur hier, sondern auch bey allen andern Vermessungen weit leichter und schneller in die horizoutale Lage zu bringen. Offenbar wird durch diesen Kunstgriff, auf einmal einen Winkel von 90° zu nehmen, möglich gemacht. Auf allen ähnlichen Punkten bleibt das Verfahren das nämliche.

Sollte die Vermessung von d über c und b nach a vorgenommen werden, so neige ich den Grad- oder Vertikalbogen gegen c um 45° abwärts,

und

und beobachte übrigens die bereits gegebenen Vorschriften.

Auf den Punkten a und d, nämlich auf jenen, wo die starke Abweichung von der horizontalen Ebene beginnt, muß mit vorzüglichem Fleiße vor der Abnahme der Linie ab oder dc nach x oder y zurück visirt, und das Instrument zuvor und nachhin vollkommen genau horizontal gestellt werden, wenn nicht ein merklicher Fehler entstehen soll.

Den Neigungswinkel ab, bc u. s. w. richtig zu erhalten, muß entweder der Querarm ee des Visirobjektes Fig. 21. und 24. um den Betrag der Höhe, den das Instrument durch die Neigung verlieret, erniedriget, oder der Träger AB um so viel verkürzt werden können. Das Visirobjekt ebenfalls um 45° zu neigen, geht, ob es gleich das natürlichste wäre, deßwegen schwerlich an, weil das Licht gegen das Glas anschlagen würde. *).

Zween seiger übereinanderliegende Züge (z. B. ab und cd Fig. 26.) mit einander zu verbinden, verlängere ich die längs ab gespannte Schnur über ef hinaus, und fälle dann mittelst des gewöhnlichen Grubenfen-

*) Man könnte aber doch im Träger unter der Laterne ein Scharnier, wie b in Fig. 8. anbringen, und dadurch das Neigen möglich machen.

senkels, sowohl neben bc als neben ed auf die Linie cd zwo Perpendikularlinien; vielmehr bezeichne dadurch auf cd zween Punkte, die mit zween andern auf der Linie eb in die nämliche Vertikalebene fallen. Wenn die Meßböcke genau über die zween Punkte gesetzt werden, so ist der Winkel der Linie ab in der Grube übergetragen, und der höhere Zug mit dem tiefern verbunden.

Auf gleiche Art kann der tiefere Zug mit dem höhern angeknüpft werden. Wenn die Perpendikel in e und b über d und c durch Senkel errichtet sind, so ziehe ich die Schnur ab über e dergestalt hinaus, daß sie die beyden Perpendikel (perpendikulärgespannten Schnüre) berührt. Es darf nun bloß das Instrument auf den in der Grube gegebenen Winkel gestellet werden, und der Aufgabe ist Genüge geschehen.

Ich darf billig voraussetzen, daß der praktische Markscheider die dabey vorkommenden Nebenumstände gehörig zu ordnen wisse.

§. 18.

Ein Visirinstrument mit Kompaß statt der Horizontalscheibe.

In den Jahren 1781. 82. und 83. mußten die weitläufigen Förste um Bodenwehr geometrisch aufgenommen werden. Die Arbeit hatte Eile, und über die Vermessung war ein Zugbuch zu halten nothwendig.

dig. Dieß veranlaßte den damaligen Oberverweser, Herrn Johann Georg Fuhrmann, einen erfinderischen Mechaniker, ein eignes Instrument zu diesem Geschäfte zu bauen, wodurch die Arbeit sehr beschleuniget wurde. Allein für unterirrdische Vermessungen hatte es zu wenig Schärfe, obwohl es an und für sich zu selben sehr bequem gewesen wäre. Ich änderte es daher zu dieser Absicht so ab, wie es hier beschrieben ist. Die Beschreibung wird wegen der Einfachheit der Idee auch ohne Zeichnung zu fassen seyn.

Der Untertheil der vorhin beschriebenen Meßinstrumente wird auch bey diesem bis an den doppelten Zapfen D beybehalten; denn an dessen Statt wird auf die zeckigte Platte C ein dichter Zapfen angefertiget, über welchen der Obertheil mit einem hohen Zapfen und dem Arme T gesteckt wird. Um diesen zu stellen, ist eine der vorhin erwähnten Vorrichtungen mit Libelle und Mikrometerschraube angebracht. Das Visirrohr gleichet ebenfalls dem vorigen. Doch braucht es nur einfache Dioptern; denn zurück zu visiren ist gewöhnlicher Weise hier unnöthig. Am Grunde des Gradbogenträgers ist auf einer mit der Achse des Visirrohrs parallel laufenden Seite ein Behältniß für den Kompaß mit einer Stellschraube angefügt *). Wenn das Instrument berichtiget ist, so wird auf

*) Gegenüber könnte einer Höschelschen Libelle in Gestalt einer runden Büchse ein Platz eingeräumet werden,

auf diesem Behältnisse der Stand der Magnetbüchse bezeichnet, damit die Nadel allemal richtig auf die Magnet- oder Mittagsebene, je nachdem man eine derselben zur Vermessung gewählt hat, einspiele, und diese mit der Achse des Visirrohres immer parallel gestellt sey.

Die Magnetnadel wird dieselbe Stunde, oder denselben Grad zeigen, das Visirrohr mag nun gerade über dem Stifte oder zur Seite aufgerichtet seyn; dieß bringt die Natur des Magnetismus mit sich. Allein der Stand des Gradbogens über dem Gehäuse der Nadel erschweret, wie auch immer der Träger beschaffen sey, in mehrern Situationen die Beobachtung des abgeschnittenen Grades ganz außerordentlich. Der hier vorgeschlagene Bau des Instrumentes hat also unbezweifelte Vorzüge.

Ob dieses Instrument in Verbindung mit dem Meßbocke nicht mehr, oder doch eben so viel Genauigkeit gewähre, als der gewöhnliche Hängekompaß und Gradbogen, darüber mögen geübtere Männer urtheilen; daß die Abnahme der Grade über Tag und in der Grube auf selben mit ungleich wenigern Schwierigkeiten verknüpft sey, habe ich vielfältig erfahren.

An Stellen, wo die Wetter stark ziehen, werden sich seine Vorzüge am ersten offenbaren. Wie lange

hat

---

den, wenn man die gewöhnliche auf dem Visirrohre nicht anbringen will.

hat man dort öfter zu harren, bis die Nadel und der Senkel nur einen Augenblick ruht, um den Winkel doch beyläufig zu erhaschen.

Dieses Instrument noch mehr zu vervollkommnen, habe ich außer dem Gehäuse der Magnetnadel eine Zirkeltheilung von 40° angebracht *), wodurch man den Kompaß sogleich auf die jedesmal beobachtete Abweichung der Magnetnadel vom Meridian korrigiren, und also die reduzirte Streichung ohne besondere Berechnung erhalten kann.

Wenn man das Magnetgehäuse an zwo Schrauben, wie beym Hängkompasse spielen läßt, so kann man nach §. 17. alle mögliche Messungen mit diesem Instrumente verrichten. Ueberhaupt verbindet es sehr viele Bequemlichkeiten, wenn es mit Ueberlegung gebaut und angewandt wird.

§. 19.

Kurzer Unterricht vom Gebrauche dieses Instrumentes.

Bey den Vermessungen mit diesem Instrumente sind nur zween Meßböcke nothwendig, weil, wie gesagt,

*), Wenn man die beyden Schrauben, wodurch der (ungarische) Grubenkompaß mit dem Gehänge verbunden wird, in einen horizontalen, um jene zwo Schrauben beweglichen

sagt, das Zurückvisiren ganz wegfällt. Auf den einen A wird das Meßinstrument, auf den andern B eines der beschriebenen Objekte (Lampen) gesetzt, nachdem die Schnur zwischen selben gespannt ist. Wie das Instrument beym Visiren aus dem Rauhen und in's Feine gestellt werde, habe ich schon gesagt. Ist der Stand der Magnetnadel und der Grad des Gradbogens in's Zugbuch eingetragen, so wird auch die Schnur gemessen, und im Zugbuche angemerkt. Hierauf wird der Meßbock A nach C versetzt, die abgelöste Schnur wieder angespannt, das Vistrinstrument auf B und das Objekt auf C gestellt, und kurz so verfahren, als wenn der Kompaß und Gradbogen an die Schnur gehängt würde. In §. 3. ist dieses umständlich beschrieben.

Hieraus wird ein Praktiker deutlich erkennen, daß die Vermessung durch dieses Instrument merklich beschleuniget werde. Dem Spiele des Senkels abzuwarten, hat er nicht nöthig; und da die letzten Bewegungen sanft geschehen, so ist die Magnetnadel meistens schon in Ruhe, bis er die Grade am Gradbogen abgenommen hat. Wäre der Umstand nicht, daß man das Instrument bey jeder Schnur wieder senkrecht stellen

chen Ring, der eine ähnliche Theilung hätte, und worinn das Gehäuse nach Gefallen gewendet und fest gestellt werden könnte, eingreifen ließe; so würde der Grubenkompaß ebenfalls auf der Stelle die reduzirte Streichung angeben.

muß; so würde ganz gewiß mehr als die Hälfte der Zeit dadurch erspart.

§. 20.

Untersuchung und Berichtigung des Instrumentes.

Ein ordentlicher Markscheider wird kein Instrument brauchen, daß er nicht vorher genau in allen Theilen untersucht hat; denn er setzt sich der Gefahr aus, dadurch seine Ehre zu verlieren, und großen Schaden anzurichten. Wie dergleichen Untersuchungen veranstaltet werden sollen, habe ich bereits Vorschriften mitgetheilt. Auch bey dem gegenwärtigen Instrumente finden diese nämlichen statt, in so ferne sie auf den Kompaß angewandt werden können. — In Rücksicht dessen sind jedoch noch folgende Aufgaben zu beantworten:

1. Ob die Magnetnadel ganz frey sich bewege, kann man sogleich sehen, wenn man selbe mit einem Eisen oder Magnete aus dem Stande bringt, den sie nach längerm Oszilliren eingenommen hat. Bleibt sie wiederholt auf dem nämlichen Punkte stehen, und hält sie damit durch mehrere Veränderungen der Stellung, die man der Büchse allmählig giebt, ein, so thut sie ihre Schuldigkeit. Die Ursache der Stockung ist bald ein Schaden, den die Spitze des Stiftes gelitten hat, bald Feilspann, der sich irgendwo angelegt hat, bald Unreinigkeit im Gehäuse der Nadel.

2. Ob die Nadel gerade sey, und sich genau um den Mittelpunkt des eingetheilten Randes drehe, wird dadurch entdeckt, wenn man selbe allmählich durch den Stundenring (die Theilung) passiren läßt, und sieht, ob sie immer den Kreis genau halbirt, also den Rand auf beyden Seiten genau in 180 Grade theilt. Wenn die zwey Enden durchgehends eine gleichförmige Abweichung von 180 Graden zeigen, so ist die Nadel meistens nicht gerade; zeigen sich aber bald gleiche, bald verschiedene Winkel, dann steht der Stift zuverlässig nicht in der Mitte der Büchse *). — Dieser Fehler muß berichtiget werden, ehe man's unternimmt, die Frage zu entscheiden, ob die Achse des Visirrohres mit der Magnetlinie parallel laufe; weil man sich sonst vergebliche Arbeit machen würde.

3. Ob das Visirrohr mit der angegebenen Magnetebene parallel laufe, kann nur dadurch bestimmt werden, daß man sich zuvor die Abweichung der Magnetnadel von der Mittagsebene, und damit die Magnetebene selbst bekannt macht. Man untersuche nun, ob sich dieselbe Abweichung zeige, wenn man mit dem Instrumente von einem Endpunkte zum andern einer richtig abgesteckten Mittagslinie visirt. Im Falle einer Differenz wird entweder die angegebene Magnet-

ebene

*) Der ungleiche Abstand der Nadel vom Stundenringe beweist diesen Fehler bey einem ordentlich abgedrehten Stundenringe ebenfalls.

ebene zurecht gerichtet, oder die gefundene Differenz nach Befund der Sache bey jeder vorzunehmenden Stellung des Instrumentes addirt oder subtrahirt.

Nach dieser Vorbereitung kann man erst versichert seyn, daß man durch Berechnung oder, wenn man den Kompaß sogleich auf die Mittagsebene stellte, durch Beobachtung die reduzirte Streichung zuverläßig erhalte.

Wie sehr die Abweichung der Magnetebene von der wahren Mittagsebene in kurzen Zeiträumen hintereinander und hie und da in geringen Ortsabständen wechsle, ist zu auffallend, als daß es von jener Epoche an, wo man die Natur zum Gegenstande der Wissenschaften gewählt hat, lange mehr hätte verborgen bleiben können. Wir wissen aber seitdem auch eben so gewiß, daß die mittlere Lage der Magnetebene des nämlichen Ortes nach einem kürzern oder längern Zeitraume sich mehr oder weniger zu ändern pflege. Hieraus erhellet, daß man den Unterschied der Magnetebene von der Mittagsebene für jede Revier bestimmen, von Zeit zu Zeit untersuchen, und auch auf die Plane tragen müsse, wenn anders diese unsern Nachkommen noch den ganzen Nutzen, den sie könnten, verschaffen sollen. Da diese Ebene und ihre Berichtigung, der Plan mag mit was immer für einem Instrumente aufgenommen worden seyn, für die Folgezeit ewig die Wegweiserinn bleiben wird; so würde man sehr gut thun, wenn man auf jedem Hauptgrubengebäude für eine unwandelbare Mittags- oder auch andere Linie

zween

zween ausgezeichnete Punkte in der Natur suchte, oder durch Kunst herstellte, und diese Linie bey allen Vermessungen von Bedeutung zum Anhalten nähme. Durch dieses Mittel könnten nach Jahrhunderten nicht nur die Plane in Rücksicht der Magnetabweichungen und anderer dem Zufalle unterworfenen Angaben genau berichtiget, sondern auch alle Stellen des Planes in der Natur wieder richtig aufgefunden werden.

§. 21.

Verbesserte Eisenscheibe *).

Ich erinnere mich ganz wohl, daß ich die Eisenscheiben im Eingange dieser Schrift verschrieen, und ihre Anwendung mißrathen habe. Die Rede war aber dort bloß von den Eisenscheiben in der Gestalt, wie sie dermalen noch beschaffen sind; die ursprüngliche Idee derselben schien mir immer, und scheint mir jetzt noch so wichtig, daß ich die Zeit gar nicht für verloren halten konnte, die ich auf Ausmittelung einer vortheilhaftern Bauart verwenden würde, ob sie gleich die in §. 5. und §. 8. beschriebenen Instrumente nunmehr in allen Fällen ganz entbehrlich machen. Der Meßbock

dünkte

*) Eben, da ich mein Manuscript an den Verleger absenden will, erhalte ich: Beschreibung eines vollständigen Apparats zu ökonomischen Vermessungen ꝛc. von J. G. Studer, Bergmechanikus in Freyberg, worunter gleichfalls eine verbesserte Eisenscheibe angegeben ist.

dünkte mich besonders günstig, um irgend einen glücklichen Einfall realisiren zu können. Indessen kann ich nicht verneinen, daß mir diese Arbeit saurer geworden, als ich am Anfange vermuthet hatte. Von den vielen Entwürfen, die ich zu verschiedenen Zeiten ausgehecket habe, will ich nur jenen hier zur Schau ausstellen, den ich für den brauchbarsten halte.

Der dichte Zapfen ACB Fig. 27. ist von B bis F rund, von F bis A aber viereckigt, und weiter abwärts verjüngt. Am untern Ende A wird er mit einer Kugel C verbunden, am obern Ende B aber viermal auf verschiedene Art abgesetzt, nämlich bey a vier- oder auch sechseckig, bey b rund, und bey c wieder sechseckig, und endlich bey d abermal rund. Der Absatz a kann beynahe den Durchmesser des ganzen Zapfens beybehalten; b wird mit einem Gewinde versehen, und so viel verjüngt, daß das Stück ee darüber hinabgeschoben werden kann: über c muß man die auf b passende Schraube ff hinabzustecken vermögen, und, über d muß das Stück gg schliefen; die Schraube hh paßt an d und schließt das Ganze. Die Aussenfläche der Theile ee, ff und gg muß genau rund abgedrehet seyn, ff, gg, und hh aber bekommen am Oberrande einen Vorsprung oo, der zu verschiedenen Absichten dient. Ein ähnlicher, obwohl stärkerer Vorsprung FF ist am Zapfen AB in einem willkührlichen Abstande von A angebracht, auf welchem die genau passende Hülse DDEE sich in perpendikulärer Stellung wendet. Zur Verminderung der Reibung ist der Zapfen so beschaffen, daß die Hülse

nur

nur oben und unten und etwa auch in der Gegend der Gehängzapfen an selbem anliegt. Am obern Ende dieser Hülse, das bey rr recht winklicht gekröpft ist, ist die auf irgend eine beliebige Art (am besten in 360 Grade und wieder in 24 Stunden) getheilte Horizontalscheibe SS befestiget. Um die Zapfen GG bewegen sich zwey Gehänge O P, Fig. 29., woran die Schnur fest gemacht wird. MM ist das Lineal mit dem Vernier t, und N der Arm zur Mikrometerschraube. Diese verbindet durch ein aufrechtstehendes um seinen Zapfen drehbares Klötzchen l, das auf dem Lineale MM steht, und ein ähnliches abwärts gekehrtes am Arme N, das hier gedeckt ist, den Arm N mit dem Lineale MM, und ist aus dem Vorhergehenden schon bekannt.

Die Stellschraube, welche in der Hülse des Armes N auf das Stück gg drückt, ist hier nicht sichtbar. Die zween Schenkel des Lineales MM könnten auch, und vielleicht mit Vorzug unter einem rechten Winkel zusammengestoßen werden. Der Arm N hätte wohl zwischen der Scheibe SS und dem Lineale MM hinlänglichen Raum. Dann müßte es um ee anschliessen, und mit dem andern Ende um den Rand der Scheibe so gekröpft seyn, daß es von unten an dieser mit einer Stellschraube festgestellt werden könnte. Der Theil c und das Stück gg darf nun kaum den vierten Theil der gegenwärtigen Höhe bekommen. Zur Vorsicht wäre es gut, wenn das Stück ee in diesem Falle auch denselben Vorsprung oo hätte. Die Stel-

lung

lung der beyden Klötzchen l für die Mikrometerschraube ergiebt sich aus dem Ganzen; jedes ist aufwärts gerichtet.

Wenn dieser Theil der verbesserten Eisenscheibe zusammengesetzt wird, verfährt man also: Zuerst wird die Hülse DDEE mit der daran befestigten Horizontalscheibe SS über den Zapfen AB gesteckt, bis sie auf FF aufsitzt; dann das Stück ee über a geschoben; nun das Lineal MM auf dieses gelegt, und sogleich die Schraube ff dergestalt angezogen, daß sowohl die Hülse DDEE sich um den Zapfen AB, als das Lineal sich noch um ff drehen kann. Der Arm N wird mit dem Stück gg zugleich eingelegt, und die Schraube hh endlich aufgesteckt. Eigentlich muß bey der Verfertigung schon darauf angetragen werden, daß das Lineal MM nie unbeweglich fest gestellt werden kann, die Schraube ff mag so strenge, als immer angezogen werden. Den Arm N aber soll man durch die Schraube hh nach Belieben — locker oder unbeweglich fest andrücken können. Das Verfahren, wenn der Arm N unter dem Lineale MM zu liegen kömmt, ist nunmehr ohnehin offenbar.

Der Gehänge Fig. 29. ist nur ein Paar nothwendig, weil selbe über die Horizontalscheibe leicht hin und zurück bewegt werden können. Sie sind deswegen etwas weiter ausgebogen, als der Diameter der Scheibe SS, vornen durch einen Nagel, um welchen sie horizontal genähert, oder entfernt werden können, verbun-

den,

den, dort mit einem horizontalen Hacken, der zum Einhängen der Schnur eine Spur hat, versehen, und werden an den beyden Zapfen GG der Hülse EEFF beyderseits mit einer Schraube verwahrt. Da die Zapfen GG beym Spannen der Schnur große Gewalt leiden müssen, so wird der mittlere Raum xx auf irgend eine der bekannten Arten hinlängliche Stärke zum Widerstand gegeben *). Die Ursachen von der hier gewählten Bauart der Gehänge werden aus dem Verfolge erhellen.

Ueber die bey A angebrachte Kugel C passen von unten und oben die nußförmig gebildeten und aus 3 verbundenen Stücken bestehenden Messingplatten II **) so, daß der obere Theil des Zapfens darinn noch hin und wieder geneigt werden kann. Oberhalb dem Querbrette ghik des Meßbockes (Tab. I. Fig. 1. und 3.) oder dem Spitzbrette wird hier noch ein anders op in die zween Schenkel des Meßbockes eingezapft, und auf dieses Querbret die Nuß nach gewöhnlicher Weise mit Schrauben befestiget. Das viereckigte Stück A des Zapfens reicht über den Oberthell des Meßbockes Fig. 27. noch etwas hervor. Anstatt des gebogenen Messingstückes v mit den beyden Säulchen rs Fig. 1.

sind

*) Ich wünschte sie an eine radförmige Horizontalscheibe angebracht.

**) Man sehe hierüber auch den §. 5. und die Fig. 10. Tab. II. nach.

sind zwo ebene Messingplatten KK und LL Fig. 27. an seiner Stelle angebracht. Eben deswegen muß auch der Meßbock schon zu dieser Absicht abgeändert werden; wie diese Abänderung beyläufig zu treffen sey, giebt zum Theile die Zeichnung an. Dabey würde ich rathen, die Schenkel des Meßbockes gegen den Obertheil hin auch von beyden Seiten, nämlich von c gegen d Tab. I. Fig 1. und 2. so sehr zu verjüngern, daß gerade nur die Steuerung des Instrumentes, wenn ich den Ausdruck gebrauchen darf, noch hinlänglichen Platz findet. Die Platte K K Fig. 27. ist auf dem abgeebneten Obertheile des Meßbockes unbeweglich angeschraubt. Sie hat in der Mitte eine viereckichte Oeffnung, die wenigst um einen halben Zoll nach allen Seiten weiter ist, als die Dicke oder jede Seite des Zapfens ABC, im Stücke von F bis A, beträgt. Die vier Ränder sind mit einem empor stehenden starken aber doch ungleich dicken Messingrahmen H H Fig. 28. eingefaßt, in welchem an jeder der zwo schwächern entgegengesetzten Seiten eine Stellschraube Q Q an einer in Nuthen m m der zwo stärkern oder dicken Seiten des Rahmens beyderseits gehenden Messingplatte n n, die mit den Enden über die viereckichte Oeffnung zu beyden Seiten reichlich einen Viertelszoll hinausragt, oder aufliegt, die Dicke vom Durchmesser der Stellschraube hat, und an dem gegen die viereckige Oeffnung gekehrten Rande wie ein Rundstab gebildet ist, horizontal andrückt, daß dadurch der Zapfen AF und folglich das ganze Instrument wechselweise nach der einen oder der andern Seite gegen die Stellschrauben geneigt werden kann. Unter

den

den Stellschrauben QQ ist die Messingplatte KK längs dem ganzen Laufe derselben hin des nöthigen Raumes wegen rinnenförmig vertieft. Auf die Platte KK wird die ganz gleiche Platte LL, die auch mit KK eben dieselbe Einrichtung hat, mit vier versenkten Schrauben αααα in den 4 Winkeln so befestiget, daß die schwächern Seiten ihres Rahmens auf die dickern von KK treffen, und die Stellschrauben RR Fig. 28. der Platte LL mit denen der Platte KK genau im rechten Winkel stehen, und sich daher von den 4, in Nuthen durch jene Stellschrauben verschiebbaren Platten nn je zwo und zwo in der nämlichen rechtwinklichten Richtung gegen einander bewegen. — Deutlicher weiset dieß alles die Fig. 28.

Wenn nach der vorhergehenden Angabe der Obertheile der Eisenscheibe von FF bis hh in Ordnung gebracht ist, so wird die am Ende A des dichten Zapfens AB angefestigte Kugel C durch die zwo vorläufig auf dem Meßbocke festgeschraubten Platten KK und LL (weswegen ihre Oeffnungen mit dem Diameter der Kugel auch im Verhältnisse stehen müssen) in den auf dem Querbrette op ebenfalls schon eingelegten Untertheil der Nuß gesetzt, und diese zugleich sammt den zwey dazu gehörigen Oberstücken an das Querbrett op mit 4 Schrauben festgemacht. Womit das Instrument zum Gebrauche vollendet ist.

Es könnte freylich die Nuß an die Stelle der Steuerung und diese an die Stelle der Nuß versetzt wer-

werden; aber mich dünket diese Verwechselung in mehrern Rücksichten weniger zweckmäßig.

Das Instrument beym Gebrauche horizontal zu stellen, kann man entweder eine Libelle zur Seite an dem Lineale MM über der Horizontalscheibe SS oder auf dem Rade GG anbringen, — oder den Senkel §. 10. längs der Hülse DDEE befestigen.

Ohne Zweifel wäre es vortheilhafter, wenn das Instrument im Ganzen bestehen könnte; allein da es beym Versetzen von einer Stelle zur andern in manchen Grubengebäuden alsdann gar zu leicht Schaden nehmen könnte; so halte ich für rathsamer, den Theil zwischen LL und FF in einen dichten Zapfen zu verlängern, und dem Obertheile einen darüber schließenden hohlen Zapfen mit einer starken Stellschraube (und vielleicht auch zwoen) zu geben. — Den dichten Zapfen wünschte ich wieder 4- oder 6eckicht, um die Gefahr einer unbeabsichteten Wendung des Instrumentes zu vermeiden. Der Stellschraube könnte im dichten Zapfen eine Spur vorgezeichnet werden, wodurch der Stand des Instrumentes noch mehr gesichert wäre. — Oder man baue den Theil von op an so, daß er sammt op abgehoben werden kann — und befestige auf dem Meßbock ein anderes Querbrettchen yz, auf welchem dann die ganze Eisenscheibe, sammt dem Untersatze bis op, mittelst hölzerner Zapfen und Schleifkeile so schnell und bequem als sicher festgestellet wird.

Daß

Daß zur Vermessung zwo solche Eisenscheiben mit den dazu gehörigen Meßböcken erfodert werden, will ich bloß der Vollständigkeit wegen erwähnen.

Ich habe bey dieser Vervollkommnung der Eisenscheibe öfter die Frage an mich selbst gestellt: Könnte an der Hülse DDEE nicht auch der Gradbogen mit Nutzen angebracht werden? *) Wenn die Zapfen, woran die Gehänge gehen, ordentlich sind, wie sie es ohnehin seyn müssen, so kann ich wegen der starken Spannung der Schnur hier keine größere Unrichtigkeit als bey irgend einem andern ähnlichen Instrumente besorgen. Am Gehänge würde man wohl sogar ein Plätzchen für einen Vernier finden. Ich weiß, daß Hängekompasse, die den Vertikalwinkel zugleich weisen sollen, zu dieser Absicht nichts taugen; aber ich weiß auch die Ursachen hievon, und glaube nicht, daß sie hier angewendet werden können.

Wenn man das Querbrett op drey bis 4 Zolle über die Schenkel des Meßbockes beyderseits hinaus verlängert, diese mit dem Querbrettchen hinlänglich verbindet, und das übrige ganz weglässt, oder lieber alles ebengenanntes Holzwerk gegen Messing vertauscht, so kann diese Eisenscheibe auch mit der größten Bequemlichkeit auf Spreitzen aufgesetzt werden **), und so die

eben

---

*) Herr Studer hat seiner Eisenscheibe den Vertikalbogen ohne Bedenklichkeit beygefügt.

**) Man sehe hierüber auch den Schluß des §. 2.

eben zwischen op und yz vorgeschlagene Abtheilung des Meßbockes doppelten Vortheil gewähren.

§. 22.

Justirung der vervollkommerten Eisenscheibe.

Ich glaube, daß es bey diesem Instrumente, wenn die Eintheilung der Horizontalscheibe und des Verniers einmal richtig befunden worden, nur auf vier Punkte ankomme, die man zu untersuchen nöthig hat; nämlich:

1. Ob sich jedes Gehänge in Einer Vertikalebene auf und nieder bewege, kann man sehen, wenn man, nachdem das Instrument wie allemal horizontal gestellt ist, nach Vorschrift des §. 12. Nro. II. die am Gehänge festgemachte Schnur auf und abführt. Bekanntlich muß das Instrument auf was immer für einem Punkte jener seigern Schnur angehalten, denselben Winkel zeigen, wenn es gut gebaut seyn soll.

2. Ob sich die Spur des Hackens am Gehänge (zum Einhängen der Schnur) in der durch sie und den Mittelpunkt des Zapfens AB gehenden Vertikalebene über die Horizontalscheibe hin und zurück bewege, wird sich aufklären, wenn man die am Hacken des Gehänges eingehängte Schnur zuerst nach einer Richtung spannt, dann das Gehänge über die Horizontalscheibe schlägt, und die Schnur

(wo

(wo möglich genau) in entgegengesetzter Richtung abermal anzieht, und beyde Male die Winkel richtig bemerkt — hierauf die Hülse um den halben Zirkel wendet, und endlich die vorige Operation wiederholt. Der Zuverlässigkeit wegen muß man die Schnur horizontal oder nahe daran spannen. Wenn sich zwischen beyden Beobachtungen eine Differenz bey mehrfachem Versuche gleichförmig herauswirft, so ist entschieden, daß im Instrumente ein Fehler verborgen liegt; aber es ist noch nicht ausgemacht, daß er im Gehänge allein gesucht werden dürfe. Vorher muß man sich noch versichern:

3. Ob der Zapfen, um welchen sich die Horizontalscheibe dreht, genau im Mittelpunkte der Horizontalscheibe stehe. Man kann sich davon völlig überzeugen, wenn man nach der Vorschrift des §. 12. Nro V. verfährt; indem man mehrere Winkel nach der Peripherie willkührlich absteckt, und selbe zuerst mit dem nach der einen dann nach der andern Seite gekehrten Gehänge abnimmt. Zeiget sich genau eine Differenz von 180 Graden, so ist das Instrument in der Lage der Horizontalscheibe fehlerlos. Da aber der Zapfen, um welchen sich die Hülse mit der daran befestigten Horizontalscheibe wendet, fehlerhaft seyn könnte; so muß man auch alsdann den Zapfen allmählig z. B. je um den vierten Theil der Peripherie drehen, d. i. den Meßtock um diesen Betrag herumwenden, und dieselben Winkel in jeder Stellung wieder abnehmen.

4. Ob sich das Lineal um den Mittelpunkt seiner Achse drehe, wird gefunden, wenn man die

nämlichen Winkel, welche man so eben mit umgewechseltem Gehänge und nach und nach gewendetem Zapfen abgenommen hat, mit durch alle Grade der Horizontalscheibe allmählich gestelltem Lineale auf dieselbe Art mißt. Die vollkommene Uebereinstimmung der Winkel beweist die Richtigkeit des Instrumentes, die Abweichung seine Gebrechen.

§. 23.

Anwendung der verbesserten Eisenscheibe.

Die auf den Meßböcken oder Spreitzen befestigten Eisenscheiben, werden, wenn sie auf ihrem Platze A und B Fig. 6. sind, vor allen horizontal gestellt. Aus dem Rauhen muß dieß bey gegenwärtigem Instrumente dadurch geschehen, daß man den Meßbock, oder die Spreitze so viel möglich der horizontalen Lage nähert; in's Feine wird es durch die Stellschrauben QQRR u. s. f., Fig. 28. an den Messingplatten KK und LL verrichtet. Beyde entgegengesetzte Schrauben müssen allemal an die Ränder jener Platten fest andrücken, wenn die Horizontalstellung vollendet ist. Das Verfahren bey diesem Geschäfte darf ich wohl nicht umständlich beschreiben. Wenn beyde Eisenscheiben in Ordnung sind, so wird das Gehänge einer jeden so gekehrt, daß man zwischen ihnen die Schnur spannen kann. Die Schnur wird zuerst in die Spur des Hackens am Gehänge eingelegt, links und rechts daran umschlungen, endlich um das Gehänge selbst etliche Male gelegt, und zuletzt

mit

mit einem Knotten oder einer Schlinge verwahrt. Ist die Richtung der Linie gegeben, so wird das Lineal MM der Eisenscheibe B Fig. 6. auf die bekannte Weise hierauf gestellt, nun die Stellschraube am Arme N und die Schraube hh angezogen. Nachdem der Horizontal- und Vertikalwinkel abgenommen, und eingetragen ist, wird die Schnur abgelöst, der Meßbock A an die Stelle C versetzt, und wieder wie vorhin manipulirt. Ein wesentlicher Umstand ist, daß man, woferne man den Zusammenhang der Winkel von der ersten Linie weg beybehalten, und sich dadurch die Arbeit sowohl, als die nöthige Uebersicht erleichtern will, das Lineal MM der vordern Eisenscheibe (hier C) vor dem Abspannen der Schnur jedesmal genau auf den Winkel der eben gemessenen Schnur also in diesem Falle auf den so eben beobachteten Winkel von B genau richte. Wer seine Winkel allezeit von Zero an bestimmen will, muß das Lineal MM von der Eisenscheibe B u. s. f. vor Abledigung der Schnur natürlich auf 360 stellen.

Vor dem Gebrauche muß dieses Instrument ebenfalls mit zerlassenen frischen Rindsfett eingeschmieret werden. In Gruben, wo es stark tropft, und die Wässer wohl gar erdige Theile mit sich führen, muß man mit allen Instrumenten vorsichtig umgehen, und sie öfter reinigen, damit sie nicht durch Reibung leiden; noch mehr aber, wo es röllig ist.

§. 24.

Beschreibung eines bequemen Hängesenkels, oder sogenannten Lothes.

Jedem, der sich mit geometrischen Arbeiten beschäftiget, ist bekannt genug, wie oft man in die Nothwendigkeit versetzt werde, auf einen bestimmten Punkt zu senkeln. Man hat daher zu den verschiedenen Arten des Gebrauches auch verschiedene Senkel erfunden; aber doch glaube ich, daß die Bekanntmachung jenes Senkels, den ich einst vom sel. Oberverweser Georg Fuhrmann erhielt, bey manchen Vorfällen für Feldmesser, und auch für andere nicht ganz überflüssig sey. Mir hat er schon häufig aus der Verlegenheit geholfen.

Der Senkel A Fig. 30. ist wie gewöhnlich gestaltet; im Mittelpunkte a seines Obertheiles wird auf eine der bekannten Arten eine Saite befestiget, die durch den in der Mitte der Länge nach geräumig durchbohrten Zylinder B von Messing oder Zinn gezogen wird, dann durch den runden oder gedrückten Ring b läuft, und bey c an ein anderes Stück Saite genau in der Mitte desselben angeknüpft ist. Die beyden Enden d und e dieses Saitenstückes werden von innen nach aussen durch zwey gegenüberstehende Löchelchen jenes Zylinders B geschoben, und durch Knotten wieder zurückzuschlüpfen verhindert. Da der Abstand der beyden Saitenenden vom Zylinder B nach e vollkommen gleich seyn muß, so thut man am besten, wenn man die Ver-

knü-

Knüpfung bey c so einrichtet, daß man jedes Ende des eingebundenen Saitenstückes nach Nothdurft darinn durch Verschieben verlängern oder verkürzen kann. Der Senkel A und Zylinder B müssen gleich schwer seyn.

Die Erfahrung hat mich belehrt, daß die Saite nicht straff genug angezogen werden kann, um richtig zu senkeln; ich habe sie daher mit einer gedrehten Seidenschnur von gleicher Dicke verwechselt, und dadurch manche Unannehmlichkeiten beseitiget. — Wenn das Stück CbBa bey einzelnen Vorfällen zu lang ist, so kann man in selbes eine Schleife schlingen.

§. 25.

Beschreibung des Fuhrmannischen Zulegin-strumentes.

Mit was immer für einem Instrumente eine Vermessung vorgenommen worden, so kann sie doch unter gewissen Voraussetzungen mit dem Kompasse zugelegt werden. Im Gegentheile kann man auch jene Verschnürungen, wozu man sich des Kompasses bediente, mit einem Transporteur auftragen. Indessen sind die Transporteure für die Zulegung der mit dem Kompasse verrichteten Züge mehr aus Ueppigkeit des Verstandes als des Nutzens wegen erfunden worden *); denn noch

weiß

*) Ich habe auf meinen Reisen in einigen nicht unbedeutenden Bergörtern sehr sonderbare Ideen von Transporteuren gefunden.

weiß ich nicht, daß man sie angewandt habe. Allein ihre Anwendung ist auch — ungeachtet aller Verbesserungen — noch immer mit so vielen Schwierigkeiten verknüpft, daß man nicht den mindesten Vortheil vor dem Kompasse dabey findet.

Wohin soll sich nun der Grubenbeamte wenden, der seine Grubengebäude zu Papier bringen möchte und sollte, und in seiner Wohnung wegen Mangel des Lichtes oder Engfängigkeit des Raumes, oder Nähe des Eisens, oder Erschütterung durch das benachbarte Hammerwerk mit dem Kompasse nicht zurecht kommen kann? Das eine wie das andere hat mein Vorfahrer in Bodenwehr der sel. Oberverweser Fuhrmann so oft erfahren, daß er bewogen wurde, auch ein neues Zuleginstrument zu seiner Hausnothdurft zu bauen. Er hatte in der That den Unannehmlichkeiten des Kompasses — ohne auch nur Eine Ungemächlichkeit der gewöhnlichen Transporteure zu verbinden — dadurch glücklich abgeholfen, und den ungetheilten Beyfall aller Sachkenner erhalten. Bereits sind mehrere Exemplare hievon in den Händen derselben. Ich darf es daher ungescheut als Ersatz des Kompasses beym Zulegen anpreisen. Da es Herr Markscheider Neumann in seinen Beyträgen zur praktischen Geometrie schon beschrieben und abgebildet hat, so verweise ich die Wißbegierigen, die nähere Kenntniß hievon verlangen, auf jene Schrift, ich will seiner hier nur kurz erwähnen.

Zwey hölzerne Lineale sind genau in paralleler Richtung an beyden Enden ungefähr 4 Zolle lang so verbunden, daß zwischen ihnen ein Raum von etwa einem halben Zolle bleibt. Unter den beyden Verbindungen liegt eine dünne Schiene Holz von der Breite des ganzen Instrumentes und der Länge der Verbindung. Das eine Ende ist in einen Anschlag befestiget, das andere frey. In dem Zwischenraume läuft das Zuleginstrument, das aus folgenden Theilen besteht. Aus der Mitte einer viereckichten unter die 2 parallelen Lineale gelegten Messingplatte ragt ein zylindrischer dichter Zapfen (Stift) empor, über welchen ein hohler ebenfalls zylindrischer Zapfen, oder vielmehr eine Hülse in gleicher Höhe mit der Dicke der 2 Lineale paßt. Auf der Hülse ist die Stundenscheibe befestiget, an der Stundenscheibe selbst aber sind 2 Messingstreifen, von der Breite, daß sie den vertikalen Raum zwischen den beyden Linealen beynahe ausfüllen, mit Schrauben festgemacht. Am äußern Ende ist jeder Streifen in horizontaler Richtung rechtwinklicht abgebogen, um zwischen die Lineale einzugreifen, und folglich die Stundenscheibe in ihrer Stellung zu erhalten. Weil aber doch der Spielraum nöthig ist, und dadurch kleine Verrückungen möglich würden, so ist auf der innern Fläche jedes abgebogenen Theiles der beyden Messingstreifen ein anderer federhart gehämmerter Messingstreifen, nicht ganz so lang als der halbe Diameter, und so breit, als das abgebogene Stück hoch ist, gegen die Hülse gekehrt so angeschraubt, daß jeder gegen das nämliche hölzerne Lineal drückt. Der dichte Zapfen oder Stift ragt,

wenn

wenn das Instrument zusammengesetzt ist, über die Oberfläche der Stundenscheibe etwas hervor, und endiget dann in einem etwas kleinern stählernen Zapfen mit einem nicht ganz bis an den Grund desselben reichenden Gewinde. An dem Theil ohne Gewinde wird der Zeiger, der hiezu eine genau passende Schlitze hat, angeschoben, und mit der Mutterschraube in der beliebigen Lage endlich festgestellt.

Drey Fehler hat mir die Erfahrung an diesem sonst so vortreflichen Instrumente aufgedeckt. Der erste ist, daß die 2 Lineale, wenn sie hölzern sind, durch ihre Wandelbarkeit doch das Instrument etwas unzuverläßig, und wenn sie von Messing sind, sehr theuer machen; der zweyte besteht darin, daß man in gewissen Stellungen des Instrumentes die aufzutragenden Linien nicht oder doch nicht mit der nöthigen Bestimmtheit ziehen kann. Der dritte und größte ist, daß ungeachtet der Spannfedern die richtige Abgabe der Winkel kaum bewirkt werden kann. Wahrscheinlich hat der Erfinder die Wichtigkeit dieser Mängel selbst gefühlt: denn er hat nach der Hand verschiedene kleine Veränderungen, obwohl keine ganz mit dem gewünschten Erfolge, vorgenommen. Ich will sie daher auch mit Stillschweigen übergehen.

§. 26.

Beschreibung eines verbesserten Zuleginstrumentes.

Bey meinem Amtsantritte in Bergen war eine meiner ersten Sorgen, den zerrütteten Grubenbau, so

viel

viel noch möglich wäre, wieder in Ordnung zu bringen. Ich war genöthiget mir, wenn ich anders meinen Zweck erreichen wollte, eine Karte über diese Gebäude zu entwerfen; allein beym Auftragen empfand ich alle üble Wirkungen, die die schlechte Lage eines Hauses auf den Kompaß äußern kann, so lebhaft, daß ich gerne das Fuhrmannische Zuleginstrument hervorholte. Zu meinem größten Verdrusse mußte sichs von ungefähr fügen, daß auch dieses seine Gebrechen im ganzen Umfange zeigte. In der Verlegenheit war ich wohl gedrungen, mich nach allen Seiten umzusehen, wo und wie ich mir am leichtesten rathen könnte. Daraus entstand folgende Abänderung des Fuhrmannischen Zuleginstrumentes.

An die obere Fläche des Anschlages A Fig. 31. wird ein messingenes Lineal BB (das Richtungs- oder Anschlaglineal) von der erfoderlichen Länge an jene des Anschlages aber, welche am Zeichnungsbrette hin und wieder glitschen muß, ein starker Streifen Messing cc mit versenkten Schrauben festgemacht. Am Lineale befinden sich 2 messingene Hülsen D und E; die vordere E verhindert, damit das Lineal nicht unmittelbar auf dem Papiere aufliege, weßwegen auch dicht am Anschlage ein Stückchen Messing a untergelegt ist; an der andern D, die mit der Stahlfeder b an der entgegenstehenden schmalen Seite des Anschlaglineales BB, längs mm untergelegt wird, ist das Zuleginstrument angebracht. Dieses ist nämlich also gebaut: Aus einer länglicht viereckigen Messingplatte oder dem Zulegli-

neal

neal FF, deren lange Seiten genau parallel laufen, steigt ein messingener Stift c empor, der in einer gewissen Höhe sechseckig zugenommen, dann rund abgedreht, und endlich mit einem Gewinde versehen ist. Wenn die Stundenscheibe G mit ihrer Hülse in der zirkelrunden Höhlung des Stückes D durch die Stellschraube d, wofür eigens eine Spur in der Hülse der Stundenscheibe eingetieft ist, sicher festgestellt worden; so wird der Stift durch jene Höhlung von unten geschoben, an den sechseckichten Theil desselben, der nun über die Stundenscheibe hervorragt, eine passende Beylage ee aufgesteckt, auf diese der Zeiger f mit seiner Stellschraube h lose gelegt, und nun die Schraube g angeschraubt.

Der Zeiger kann bloß in eine Spitze oder auch in eine senkrechte Schärfe enden; wer mehr Genauigkeit will, kann ohne Veränderung des Instrumentes einen Vernier anbringen. — Man sollte auch darauf antragen, daß die kurzen Seiten der Messingplatte oder des Zuleglineales mit den langen genau im rechten Winkel stehen, weil dieß in der Folge oft von Nutzen seyn kann.

Meine Absicht war bey der beweglichen Hülse E, daß das Lineal verkürzt werden könne, wenn das Zeichnungsbrett schmal ist; und bey der Stellschraube h, daß der Zeiger f und die damit verbundene Zulegplatte, oder das Zuleglineal FF, wenn sie auf den erforderlichen Winkel gerichtet sind, nach Belieben festgestellt werden können.

Nebst

Nebst diesen Vorzügen sind die gerügten Gebrechen durch meine Abänderung offenbar gehoben, wie der vielfältige Gebrauch selbes durchgehends bewährt hat. Ich nahm daher seit dieser Zeit keinen Anstand, dieß verbesserte Instrument statt des Kompasses beym Zulegen zu gebrauchen, und fand allemal meine Rechnung dabey. —

§. 27.

Berichtigung des Zuleginstrumentes.

Ich weiß nur zween Fehler, welche bey diesem Instrumente in's besondere einschleichen könnten, der erste ist:

1) Wenn der Stift, welchen der Zeiger trägt, nicht in der Mitte des Stundenringes steht. Man findet dieses, wenn man auf ein aufgespanntes Papier 2 Linien im rechten Winkel in verschiedenen Richtungen oder Neigungen gegeneinander zieht, das Zuleglineal erst an die eine, dann an die andere bringt, und dabey immer beobachtet, ob der Zeiger allemal einen rechten Winkel angiebt. Man wendet nach und nach den Zeiger durch die ganze Peripherie. Es ist dabey nothwendig, daß man immer dieselbe Seite des Zuleglinealeß an die Linie anlegt, man kann und soll aber den Versuch in der Folge auch mit der andern Seite vornehmen.

2) Wenn die 2 Seiten des Zuleglinealeß nicht parallel laufen, zeiget sich schon, wenn man

die

die vorgehende Vorschrift genau befolgt hat, noch mehr aber, wenn man zu beyden Seiten des Zuleglineales mit dem Bleystifte eine Linie zieht, hierauf dasselbe um die halbe Peripherie umwendet, und wieder an die Linien bringt. Schließen die Seiten des Lineales wieder an die Linien an, so sind sie parallel.

§. 28.

Anwendung des Zuleginstrumentes.

Ehe man noch das Papier aufspannt, muß man schon jene Seiten des Zeichnungsbrettes, woran man den Anschlag des Zuleginstrumentes beym Zulegen hin und wieder schieben will, genau untersuchen, ob sie in einer geraden Linie gefugt (gehobelt) sey; denn wäre dieses nicht, so würde das Instrument ohne sein Verschulden trügen. Sollte man in die Nothwendigkeit versetzt werden, auch die entgegengesetzte Seite, oder wohl gar noch eine dritte zwischen ihnen in der erwähnten Absicht zu brauchen, so ist es genug, wenn jede für sich eine gerade Linie bildet. Man muß sie also auch hierauf nur prüfen. Ob sie parallel laufen, oder genau einen rechten Winkel machen, thut hier nichts zur Sache.

Beym Zulegen ist das erste, daß man eine Mittagslinie (eigentlich Magnetlinie) auf dem Plane verzeichnet. Es steht in des Markscheiders Willkühr, welche Richtung er ihr nach den jedesmaligen Bedürfnissen geben will, ohne daß er deßwegen die vortheilhafte Position seines Zeichnungs-

nungsbrettes zu verändern gezwungen werde; denn er darf bloß die Schraube g am Ende des Zapfens losmachen, so kann er den Zeiger auf jede Stunde und das Zuleglineal in jede Lage rücken. So wird sie auch bleiben, wenn anderst die Schraube h wieder scharf genug angezogen worden. Nun wird der Zeiger, und damit das Lineal auf die abgenommene Stunde der ersten Schnur gestellt, und sowohl der Anschlaggehebe am Zeichnungsbrette, als auch das Zuleginstrument ohne Verrückung der Stunde am Richtungslineale so lange verschoben, bis das Zuleglineal an irgend einer Stelle mit dem gewählten Anfangspunkte zusammen trift. Alsdann wird mit dem Bleystifte die Linie gezogen, und darauf die verjüngte Länge der Sohle abgestochen. Ist der Zeiger, also auch das Zuleglineal wieder auf die Streichungsstunde der zwoten Schnur gestellt, so wird mit dem Anschlage und dem Zuleginstrumente, wie vorhin so lange gerückt, bis das Zulegslineal auf den eben erst bestimmten Endpunkt der vorhergehenden Schnur einfällt u. s. w. Auf diese Art wird verfahren, bis der ganze Plan zugelegt ist. Jeder Markscheider wird einsehen, daß er die einmal nach Mitternacht gekehrte schmale Seite des Zuleglineales allemal dahin wenden, und alle Linien nach dieser Richtung hinziehen müsse.

Sollte die Breite des Planes die Länge des Anschlaglineales überschreiten, so ist bald Rath geschaft. Man tritt mit dem Anschlage auf die gegenüberstehende Seite, legt das Zuleglineal an die Mittagslinie,

macht

macht die Schraube g des Zapfens los, stellet den Zeiger auf die ein für allemal angenommene Mittagslinie, und zieht die Schraube wieder an. Jetzt geht alles seinen alten Gang unverändert fort. Weil sich der Zeiger, und mithin auch das Zuleglineal, während der Anschlag und das Zuleginstrument hin und her geschoben wird, aus der gegebenen Richtung — besonders ehe man einige Uebung in der sichern Behandlung desselben erlangt hat — zuweilen verlieren könnte, so muß man durch Anlegung des Zuleglineales an die Mittagslinie die Stellung derselben während dem Verlaufe der Arbeit öfter untersuchen, um die Zeit nicht umsonst zu verderben.

Um den Vernier leichter auf den verlangten Punkt zu bringen, und dann in seinem Stande unverrückt zu erhalten, könnte man auch eine Mikrometerschraube anbringen, ohne befürchten zu dürfen, daß sie die übrigen Manipulationen erschweren würde. Wie diese Vorrichtung beschaffen seyn müsse, darf ich, nachdem ich ähnliche schon beschrieben habe, unbedenklich übergehen.

Will man dieses Instrument zum Kopieren brauchen, so wird es zu dieser Absicht noch bequemer, wenn man die Hülse D Fig. 31. an der Seite i k l ebenfalls viereckig macht, die Schraube, womit die Stundenscheibe festgestellt wird, nach i oder l versetzt, und in k eine Stellschraube anbringt, die mit dem Gewinde durch die Hülse n der Stundenscheibe bis auf den dichten Zapfen c reicht, mit dem Griffe aber über die

Stun-

Stundenscheibe GG selbst hervorragt. Hat man die Streichung abgenommen; so darf man nur die letzte Stellschraube anziehen, und das Lineal auf dem neuen Plane am gehörigen Punkte anlegen.

Der wichtigste Einwurf, den man gegenwärtig der Einführung jedes Zuleginstrumentes entgegen setzen könnte, ist wohl dieser: daß man seit einiger Zeit gelernt hat, die Grubenplane bloß durch Berechnungen mit Maaßstab und Zirkel weit zuverlässiger zuzulegen. Ich kenne die Stärke dieses Einwurfes ganz, und kann dagegen nichts anders sagen als: daß es jedem Markscheider, dem es um die Vollkommenheit seiner Arbeiten im Ernste zu thun ist, eben so angenehm seyn müsse, durch ein gutes Zuleginstrument schnell und zuverlässig seine Berechnungen und nach selben zugelegte Plane prüfen zu können, als ich mich freute, in der Berechnung endlich die lang ersehnte Probe der Zulegung durch Instrumente erhalten zu haben. Bey der einen wie bey der andern Art der Zulegungen kann sich aller Anstrengung zum Trotze unbemerkt ein Fehler einschleichen; aber beynahe unmöglich ist es, daß dieser nicht entdeckt werde, wenn man beyde Mittel neben einander mit der erfoderlichen Aufmerksamkeit anwendet. Grubengebäude von Belang und weitläufige Vermessungen verdienen besonders dergleichen wiederholte Kontrollen auf verschiedenen Wegen. Und in dieser Rücksicht glaube ich, daß Zuleginstrumente noch nicht als ganz entbehrlich betrachtet werden dürfen.

§. 29.

Beschreibung eines Mikrometer- oder Maaßstabzirkels.

Selbst an Bergörtern vom ersten Range kann man nicht allemal richtig getheilte verjüngte Maaßstäbe von den erforderlichen verschiedenen Größen auf Messing bekommen; um so schwerer hält es, dergleichen auf kleinen einsam liegenden Werkern sich zu verschaffen. Und Maaßstäbe auf Papier und sogar auf hartem Holze sind, besonders wenn die Zirkel die gehörige Vollkommenheit d. i. auch scharfe Spitzen haben, doch einmal zu wandelbar, als daß man ihnen sehr trauen dürfte. Wer seine Plane nach Polygonometrischen Berechnungen, d. i. nach den ganzen Längen und Breiten der Sohlen zulegt, ist in dieser Hinsicht noch schlimmer daran. Ich suchte allen diesen Ungemachen dadurch abzuhelfen, daß ich dem Zirkel selbst eine Einrichtung zu geben trachtete, die nicht nur den verjüngten Maaßstab überhaupt ersetzen könnte, sondern auch verjüngte Maaßstäbe von jeder verlangten Größe auf eine bequeme Art und mit Zuverlässigkeit liefern sollte.

Der Obertheil ab und cd der beyden Schenkel dieses Zirkels Fig. 32. A und B ist viereckicht, und bis an das Scharnier ac von gleicher Dicke. An jedem Schenkel wird innerhalb diesem Raume eine Hüse e und f auf- und abgeschoben. Jede Hülse kann an jeder Stelle mit einer Stellschraube befestiget werden, und ragt auf der, der Zirkelöffnung entgegengesetzten

äu-

äußern Seite, so weit hervor, daß in dem durch selbe, im rechten Winkel mit der Richtung der Schenkel, gebohrten Loche ein Klötzchen g und h um seine Achse sich drehen kann. Diese Klötzchen sind sammt der durch beyde gehenden Schraube i k so gebaut, wie sie §. 5. bereits beschrieben, und Fig. 11. abgebildet worden. In der nämlichen durch den Mittelpunkt des Zapfens und des eben erwähnten Schraubenloches gehenden Ebene wird auf der Oberfläche jedes Klötzchens eine Schlitze gemacht, worinn ein Maaßstab zur Bestimmung der passirten ganzen Lachter oder Ruthen, parallel mit der Schraube i k läuft. Er wird in g festgemacht und ist hier, weil er die Schraube i k decken würde, nur durch die punktirten Linien angezeigt. Ein im Klötzchen h eingeritzter Strich reichet zur Bestimmung jener Ganzen hin, wenn man den innern Rand desselben nicht dazu anwenden will. Auf der Außenseite des Klötzchens g ist ein Cadran 11 befestiget, auf welchem ein mit der Schraube umgehender, um seine Achse verrückbarer Zeiger m oder Vernier, der über die ganzen abzugebenden Theile (wenn man will, bis in die Tausendtheilchen) abschneidet. Der auf der innern Seite des Klötzchens e hervorragende Zahn n greift, wenn beyde Zirkelschenkel genähert werden, in eine passende Spur des Klötzchens f. Bey b und d sind die Schenkel wieder so viel einwärts gekröpft, als sie es bey a und c auswärts sind. An den Hülsen ist auf der abgekehrten Seite ein gewöhnliches um ein Futter der Stellschraube der nämlichen Hülse bewegliches Uhrfedergehäuse o o mit einer Saite oder Uhrkette p,

das Ende der Feder an dem Futter der Stellschraube in f, und das Ende der Kette an der Hülse e festgemacht.

Es liegt am Tage, daß man durch das Verschieben der Hülsen e und f eine Menge verjüngter Maaßstäbe mit leichter Mühe und aller Sicherheit auf diesem Zirkel machen könne; nur kleinere, oder eben so große, als der Raum einer Schraubenrevolution beträgt, fodern mehr Aufmerksamkeit und einige Künsteley. Doch auch diese kann man bey vorgeschlagenen Vorrichtung mit gleicher Leichtigkeit erhalten: man darf nämlich diesen Zirkel nur nach der Art der gewöhnlichen vierschenklichten Proportionalzirkel bauen. Dieß kann man unbedenklich, denn die von den Proportionalzirkeln sonst unzertrennlichen Gebrechen haben hier gar keinen Einfluß. — Die Verlängerung oder Verkürzung der dieß- und jenseitigen Schenkel durch die sogenannten Zirkelstücke giebt ebenfalls zu manchen Veränderungen der Maaßstäbe Gelegenheit.

Ohne die geringste Verletzung der Zuverläßigkeit dieses Instrumentes können alle Theile desselben so geschmeidig gearbeitet werden, daß dadurch der Vorwurf eines beschwerlichen Gewichtes und folglich das bedeutendste, vielleicht einzige Hinderniß wegfällt, das dessen Gebrauche entgegen stehen kann.

§. 30.

Untersuchung und Gebrauch des Maaßstab-zirkels.

Die zwo Hülsen e und f werden, nachdem die beyden Schenkel des Zirkels bis zur Berührung genähert worden, so lange an dem ihnen angewiesenen Raume hin und wieder gerückt, bis die Spitzen des Zirkels nach einer gewissen Anzahl von Schraubenrevolutionen ein bestimmtes damit proportionirtes Maaß (z. B. nach 10 Revolutionen 10 Lachter oder Ruthen) genau fassen. Dieses Geschäft zu erleichtern, soll wenigst der eine Schenkel im Laufe der Hülse, der Länge nach, auf einer Seite in nicht allzu große Theile getheilt seyn. Daß der Zeiger m des Cadran 11, bevor die Schraube ik in Bewegung gesetzt wird, auf Zero stehen, und nach jeder Stellung die Hülsen e und f durch ihre Stellschrauben befestiget werden müssen, ist aus dem vorhergehenden bekannt. Der Sicherheit wegen werden hierauf verschiedene Maaße abgestochen, und gegen den Maaßstab verglichen. Hat man die Abgabe der Ganzen richtig erfunden, so verfährt man auf ähnliche Art, mit der Untersuchung der Theile z. B. der Schuhe und Zolle.

Wenn man nun mit diesem Zirkel ein verlangtes Maaß, z. B. 6 Lachter 7 Zehentel 8 Zolle abnehmen sollte, so wird zuerst der an der Schraube ik angebrachte bewegliche Zeiger m, nachdem die beyden Schen-

kel des Zirkels ganz genähert sind, auf Zero gestellt; dann, wenn jeder Schraubengang 1 Lachter bezeichnet, die Hülsen e und f so lange hin und hergeschoben, bis die Zirkelspitzen bey 10 oder 20 Schraubenrevolutionen 10 oder 20 Lachter auf dem gewählten Maaßstabe genau ausschreiten; hierauf die beyden Schenkel des Zirkels durch die Schraube ik so genähert, daß das Klötzchen h oder die auf demselben eingeritzte Linie auf dem in beyden Klötzchen liegenden Maaßstabe 6 Lachter abschneidet; endlich die Schraube noch so viel gewendet daß, nach Beschaffenheit der Eintheilung des Cadrans der an selber befindliche Zeiger oder Vernier m 7 Zehentel 8 Zolle weiset.

Auf einen in 100 Theile getheilten Cadran können mit einem 10theiligen Vernier auch Linien abgenommen werden, wenn eine Umdrehung 1 Lachter mißt; soll Eine Schraubenrevolution 10 Lachter gelten, so stufft der Werth der Theilungen verhältnißmäßig ab. Bey den Wendungen der Schraube ist die bereits (§. 5. u. a. m.) angegebene Vorsichtsregel, selbe immer nach einer Seite zu drehen, aus den nämlichen Ursachen zu beobachten.

§. 31.

Der Stangenzirkel als Maaßstab: oder Mikrometerzirkel.

Beym Auftragen oder Zulegen der Plane nach polygonometrischen Berechnungen, oder ganzen Längen und

Brei-

Breiten der Sohlen, ist der eben beschriebene Zirkel öfter nicht mehr hinreichend, sondern unmittelbar ein Stangenzirkel nothwendig *). Auch mit diesem letztern kann man verschiedene Maaßstäbe nachahmen, wenn man es an Aufmerksamkeit nicht fehlen läßt.

Zwo messingene oder eiserne 4kantige Stangen aa bb Fig. 33. von 2 Linien Breite und 3 Linien Dicke werden mit einem Ende an einem Stücke Messing c 5 bis 6 Linien voneinander parallel befestiget. In das Messingstück ist parallel mit den 2 Stangen ein zirkelrundes Loch von $2\frac{1}{2}$ Linien Durchmesser gebohrt, worinn eine Schraube dd nicht ganz von der Länge der zwo vierkantigen Stangen aa bb geht. Mit dem andern Ende läuft die Schraube dd in einem Stücke Messing e, das durch versenkte Schrauben an die durchgesteckten Stangen aa bb festgemacht wird, und in dem Raume zwischen den Stangen mit der Stellschraube fg versehen ist. Diese Stellschraube hat bey g eine Spur, worinn die lange Schraube dd gehet, und dazu dienet, die Schraube dd mit dem runden Plättchen oder Ansatz ii immer gehörig fest an das Messingstück c anzudrücken. Zwischen beyden Messingstücken c und e

läuft

*) Um die vielen Perpendikularlinien schnell, bequem und doch sicher aufzurichten muß man ein ziemlich langschinklichtes Winkelmaaß haben, das auf dem Punkte, wo beyde Seiten des rechten Winkels zusammen treffen, wie die Transporteure am Mittelpunkte, ausgeschnitten ist.

läuft an den vierkantigen Stangen, die es hülsenförmig umfaßt, ein drittes Stück Messing h, welches durch die Schraube d d an c genähert oder von c entfernet werden kann. Das Muttergewinde in selbem sollte aus 2 vertikalen Backen bestehen, die durch Stellschrauben beym fortgesetzten Gebrauche angedrückt, beym Zerlegen oder jeder neuen Anwendung des Zirkels aber zurückgezogen würden, um das Gewinde der Schraube d d mehr zu schonen. An dem Stücke h und c sind die beyden Zirkelspitzen durch Schrauben so befestiget, daß sie sich bey voller Annäherung genau berühren.

Die Schraube dd hat am Ende des Stückes c einen genau einpassenden Hals; dann ausserhalb selbem eine 4eckigte Verlängerung, an welche der Schraubengriff k k gesteckt wird; und endlich ein Gewinde für eine Schraube l, den Griff festzustellen. Von vornen ist am Stücke c eine in 100 Theile getheilte Scheibe m m angeschraubt, und am Halse des Griffes k ein Zeiger n mit einem zehentheiligen Vernier angebracht, der nach Belieben verrückt und festgestellt werden kann. Am Scheibchen oder Plättchen i i ragt ein abgerundeter oder spitziger Zahn, denen an den Rädern der Taschenuhren ähnlich, vor. Er sprengt bey jedem Umgange der Schraube d d einen eckigen Zahn eines Rades o (Fig. 34. A.) das in 10 dergleichen Zähne getheilt ist, und an der einen Fläche des Messingstückes c in einer Zapfenspur sich dreht. Das Rad o hat einen Stift, der in ein ähnliches Rad p greift, und bey jeder Umdrehung des Rades o einen Zahn des Rades p sprengt.

sprengt. Bis das Rad p einmal herumkömmt, muß also die Schraube dd hundertmal um seine Achse gedreht werden. Die Räder o und p werden durch die bey dergleichen Vorrichtungen gewöhnlichen Sperrkegel r r in ihrem Stande erhalten; sonst aber mit einer Messingplatte bedeckt, durch welche die Achsen der Räder hervorreichen, um einen Zeiger darau zu stecken, und die Umdrehungen der Schraube dd an den hiezu gehörigen Zifferblättern s s (Fig. 34. B.) zählen zu können. Jedermann kennet ja die Mechanik der so vielfältig angewandten und abgeänderten Schrittzähler oder Zahlräder; es ist also zur Verdeutlichung der Idee hier nichts weiter nothwendig.

Wenn man, welches jedoch überflüssig scheint, dem Rade p mehrere Zähne z. B. 20 oder 30 giebt, so kann man die Schraubenrevolutionen bis 2 oder 300 ohne weiters bestimmen; thut man noch ein Rad hinzu, so kann man bis auf so viel Tausende hinan gehen.

§. 32.

Untersuchung und Gebrauch des Stangenzirkels als Mikrometerzirkels.

Die Zusammensetzung dieses Zirkels bedarf kaum einer Anweisung. Es wird nemlich zuerst die Schraube dd durch die Höhlung des Messingstückes c gesteckt, an den viereckigten Theil derselben der Schraubengriff mit dem Vernier n angeschoben, und alles mit der Schraube l verwahrt. Dann wird das Stück h mit

eis-

einer Zirkelspitze längs den beyden Stangen aa bb durch die Schraube dd gegen c gezogen; endlich das Messingstück e mit der Stellschraube fg an seiner Stelle befestiget.

Beym Gebrauche dieses Instrumentes kömmt es vor allen darauf an, welchen Werth man einer jeden Schraubenrevolution beylegen wolle. Gesetzt sie gelte Ein Lachter; so wird die hunderttheilige Scheibe m durch Beyhülfe des zehntheiligen Berniers tausend Theilchen eines Lachters abschneiden, — der Zeiger des Rades o auf der Scheibe s die passirten einzelnen, der des Rades p aber die passirten 10 Lachter anzeigen, so daß ein Umgang von o zehen, von p hingegen 100 (oder wenn p allenfalls 20 oder 30 Zähne hätte 200 oder 300) Lachter bedeutet. Jedermann wird hieraus einsehen, wie man z. B. 36 Lachter 45, 8 Zolle mit diesem Zirkel nehmen müsse. Die beyden Zirkelspitzen werden nemlich so genähert, daß sie in einem und demselben Punkt einfallen. Nun wird der Vernier n der Scheibe m sowohl als der Zeiger der Scheiben ss auf Zero gestellt. Wendet man die Schraube dd hierauf so oft, bis der Zeiger des Rades p auf 30, der Zeiger o auf 6, der Vernier n endlich auf 45, und 8 Theilchen darüber steht, so hat man die gefoderte Länge. Wollte man eine jede Schraubenrevolution 10 Lachter — oder nur 10 Zolle gelten lassen, so ist es wohl für einen Mathematiker nimmer schwer, den Werth der Theilung zu bestimmen.

Da die abzugebenden Längen bald grösser bald kleiner werden, so muß bald vor bald rückwärts gedreht werden. Die Maschine ist so gebaut, daß dieses ohne Nachtheil geschehen kann. Nur ist dabey zu beobachten, daß man nach Vorschrift des §. 5. stets nach Einer Richtung schraube, und daher nach der entgegengesetzten Richtung allzeit etwas mehr wende, um nach der ersten Richtung wieder schrauben zu können.

Die Schraube d d liefert im Grunde freylich nur Einen Maaßstab; aber sie verschaft doch Gelegenheit, durch verschiedene Benützung der Theilung auf der Scheibe m jeden beliebigen aus dem Stegreife zu verfertigen. Nehmen wir an, daß 90 Zolle die passendste Größe eines Lachters für einen Plan wären. Wer möchte wohl die Berechnung nicht kennen, wodurch die verhältnißmäßigen Theile der Scheibe m gefunden werden?

Man stelle also vor allem eine Tabelle über dieses Verhältniß her, und man kann ohne Anstand mit der Schraube d d alle verlangten Theile abgeben.

Schrauben d d mit verschiedenen Gewinden, Scheiben m und Vernier mit verschiedenen Theilungen können die Berechnungen entweder ganz ersparen, oder doch vielfältig vermindern.

Die Art, diesen Zirkel zu untersuchen, verdient sie noch erwähnt zu werden?

§. 33.

§. 33.

Ein sehr einfaches Instrument, perspektivische Zeichnungen zu entwerfen.

Dem Geognosten und Bergmanne liegt oft viel daran, den vertikalen Umriß eines Gebirges, und der darauf befindlichen erklärenden Punkte im Perspektive zu haben; auch dem Markscheider kann dieses Hülfsmittel in der Auflösung mancher Aufgabe dienen. Ich habe mir daher ein Instrument verfertiget, das in perspektivischen Zeichnungen viele Genauigkeit, und überhaupt gegen die bisher bekannten, viele wichtige Vortheile gewährt. Allein seitdem ich die Erfindung der Kinder Edgeworth *) gesehen habe, habe ich gerne der meinigen darüber vergessen. Jedoch muß ich mir zu einiger Entschädigung für meine Bescheidenheit, die Freyheit herausnehmen, statt meines veralteten Gedankens die über dieß Instrument bereits gemachten Verbesserungsvorschläge auch mit meinen neuen Projekten noch zu vermehren.

A B C D Fig. 35. ist ein gemeines Zeichnungsbrett, das unten in der Mitte einen runden oder viereckigten Zapfen x hat, und auf zwo mit den Seiten A B und C D parallel laufenden Leisten ruht. Die Leiste A B ist von a bis b der Länge nach gleich weit ausgeschnitten;

*) Voigts Magazin für den neuesten Zustand der Naturkunde. 4r B. 2s Stück S. 223 u. f.

ten; hinter selber ist in einer beliebigen Entfernung z. B. von 1 Schuh eine dritte Leiste E F, die der Leiste A B ganz ähnlich ist. An dem viereckigten oder runden Zapfen x der in der Mitte des Brettes festgemacht ist, und an einem zwischen dem Brette selbst und der Leiste A B (auch der hinterhalb angebrachten Leiste E F) in dem Ausschnitte a b eingesetzten ebenfalls runden oder viereckigten Klötzchen v kann die gabelförmig gebildete Leiste c d heraus und hinein geschoben — mit der durch die Leiste A B zur Seite neben dem Klötzchen v durchgehenden Stellschraube y aber nach Belieben festgestellt werden. Auf der obern Fläche des Kopfes c der Leiste c d ist in horizontaler Lage ein messingenes Charnier dergestalt befestiget, daß der andere Theil desselben senkrecht herab hängt. Man kann diese senkrechte Stellung durch ein verhältnißmäßiges Gewicht oder eine selbst einfallende Spannfeder für jeden Fall erhalten. Der an dem senkrechten Theile des Charniers befindliche Zapfen m muß so angebracht seyn, daß die durch seinen Mittelpunkt gehende horizontalebene genau auf die Oberfläche des Brettes eintrifft; der Obertheil des senkrecht herabhängenden Charniertheiles dürfte deßwegen nach aufwärts ein paar Zolle verlängert werden, oder vorragen. Um diesen Zapfen wendet sich das Lineal e f, welches das zugespitzte ebenfalls um einen Zapfen bewegliche Lineal f g trägt. Beyde Zapfen sind mit Schrauben versehen, um den leichtern oder strengern Gang der beyden Lineale damit nach Bedürfniß zu leiten. An der Spitze des Lineales f g ist ein scharfer Stift z an einer Feder eingelassen.

An-

Anstatt des messingenen Scharniers kann auch ein hölzernes gebraucht werden. Die Reibung des Holzes, welche durch das Anziehen der Schraube x und im Nothfalle durch andere Hülfsmittel, z. B. eine durch die Schraube selbst angedrückte Vorrichtung noch vermehret werden könnte, wäre hier am rechten Orte angewandt. In dem Ausschnitte a b der Leiste A B und auch der hinterhalb liegenden Leiste E F kann das Lineal phi ebenfalls verlängert oder verkürzt werden; und wenn man es in der Hülse α, wovon die aufwärtsstehenden Seiten das Lineal h i, die abwärts gekehrten die Leiste A B (desgleichen E F und allenfalls auch C D) umfassen, laufen läßt, so kann es auch gegen a oder b verrücket, und durch Beyhülfe der Stellschrauben n und o auf jedem Punkte festgestellt werden. Der Kopf h dieses Lineales ragt seitwärts weg, damit das in selbem stehende Okular k (Absehen) auch in die (mitten durch das Zeichnungsbrett, den Zapfen x und das Absehen gehende) Vertikalebene gestellt werden kann. Das Okular kann man in dem Kopfe h mittelst einer Stellschraube p erhöhen oder erniedrigen.

Die ganze Vorrichtung gründet sich auf den Umstand, daß man, wie öfter der Fall eintritt, gerade einen gewissen Theil einer Gegend in's Perspektiv legen, oder im Perspektiv nach gewissen Verhältnissen aufnehmen will oder muß, und hiezu den Standort nicht nach Belieben und Bedürfniß wählen kann. Wer sieht nicht ein, daß durch die Verrückbarkeit des Okulares und Objektives, die nun in jeder Hinsicht ganz

will-

willkührlich geworden, alle Hinderniſſe weggeräumt ſind? Die Einrichtung des Objektives erleichtert und verſichert überdieß die Arbeit außerordentlich, und der an der Spitze des Lineales f g angebrachte Stift z bezeichnet durch einen ſchwachen Druck jedesmal den abgeſehenen Punkt ohne Zeitverluſt aufs richtigſte. Um noch ſchneller und gewiſſer zum Zwecke zu kommen, wäre ſehr gut, wenn bey A und B an den Seiten A C und B D zwey Lineale wären, die ſich mit dieſen Seiten ſenkrecht aufrichten laſſen. Sind ſie an den Enden bey C und D mit einer Schnur oder einem Lineale verbunden, ſo kann man von dieſen zween Senkeln herab fällen, mittelſt welcher man das feſtgeſetzte Verhältniß des aufzunehmenden Perſpektives und ſeine Gränzen vorher abgeben, und ſodann den Abſtand des Okulars vom Objektive genau beſtimmen kann.

Wenn das abzunehmende Perſpektiv von beliebiger und immer von der nemlichen Größe ſeyn darf, ſo kann freylich das Okular mit dem Objektive auf einem Lineale verbunden, und das Lineal ſelbſt unbeweglich ſeyn; die übrigen Theile fallen alsdann als unnütz weg.

Dieſes Inſtrument wäre vielleicht noch bequemer wenigſt zuverläſſiger, wenn man Fig. 36. anſtatt der Lineale e f und f g des Objektives am Ende A oder B der Seite des Brettes A B blos einem viereckigen Stab u w, der an dem ſenkrecht herabhangenden Theile eines meſſingenen Charniers oder an dem Fig. 35. vorgeſchla-

schlagenen hölzernen Charnier senkrecht gestellt, und in der nämlichen Vertikalebene horizontal niedergelegt werden kann, unbeweglich befestigte, an diesem Stabe aber einen andern zugespitzten x y in einer doppelten Hülse so anbrächte, daß der Stab x y sowohl höher als niedriger gerückt, als auch rechtwinklicht mit v w gegen das andere Ende der Seite A B mehr oder weniger verschoben werden kann. Stellschrauben und noch besser Spannfedern werden alles im sichern Stande erhalten. Den horizontalen Theil des Charniers mag man auf dem Brette A B C D unmittelbar, oder auf der vorhin beschriebenen Gabel festschrauben; je nachdem man es bedarf. An der Spitze y bleibt der Stift mit der Spannfeder; das Objektiv behält ebenfalls seine bereits angegebene Gestalt.

Das Blatt eines gewöhnlichen einfachen Meßtisches kann auf diese Art leicht in ein solches Instrument umgeändert werden, und daher doppelte Dienste thun.

Bey der Anwendung wird mit einem wie mit dem andern dieser beyden Instrumente verfahren. Man wendet nämlich das ganze Instrument, und schiebt das Lineal mit dem Absehen aus- oder einwärts, links oder rechts so lange, bis der Gegenstand in der verlangten Stellung und den gegebenen Maaßen sich zeigt. Nun visirt man nach den merkwürdigern Punkten, legt, wenn das Ende des Lineales, woran der scharfe Stift Z mit der Feder befestiget ist, einen derselben

deckt,

deckt, dann beyde in unverrückter Lage auf das Papier, und drückt endlich auf die Feder des Stiftes z, der die Stelle des abgenommenen Punktes genauer als irgend eine andere Manipulation ohne mindeste Mühe bezeichnen wird. Vielleicht könnte diese Vorrichtung mit einigen Modifikationen noch etwas mehr für diese Absicht leisten.

§. 34.

Ein anderer Bau des Instrumentes perspektivische Zeichnungen zu entwerfen.

Mit den beyden eben beschriebenen Instrumenten können nur einzelne Punkte abgenommen die nachhin erst aus freyer Hand verbunden werden müssen. Allein dabey läuft immer wieder viel Willkühr mit unter. Dieß veranlaßte mich, zu versuchen, ob man der Erfindung nicht eine Gestalt geben könnte, wodurch auch Linien zu ziehen möglich wäre. Ich glaube, es könnte auf folgende Art angehen.

ABCD (Fig. 37.) ist eine in einen Rahmen gefaßte geschliffene Glastafel, mit welcher entweder unmittelbar oder durch rückwärts angebrachte Scharniere das Zeichnungsbrett CDEF verbunden ist. Beyde Theile können auf dem Untersatze BFGH entweder in Scharnieren, oder besser um zween an beyden Enden befindliche Zapfen unter allen Winkeln erhoben oder geneigt werden, und werden durch die bey A und E am

Rah-

Rahmen und Zeichnungsbrette, bey G und H aber in verschiebbaren Hülsen beweglich befestigten Stützen nach angezogenen Stellschrauben in jedem Stande erhalten. Das Absehen a b c ist auf die nämliche Art, wie bey der vorigen Angabe gebaut, weßwegen auch im Untersatze eben solche geschlitzte Leisten und die dazu gehörigen Hülsen (Fig. 35. α) nothwendig sind.

Auf dem Zeichnungsbrette ist bey D und F ein hölzernes Klötzchen d und e befestiget, auf deren jedem sich ein Lineal d f und e g um einen Zapfen mit einer Schraube bewegt. Die Enden f und g verbindet ein Querlineal f g und unterhalb diesem sind die zwey ebenfalls an den Enden h und i durch ein Querlineal h i verbundenen Lineale f h und g i angebracht. Das Ende h läuft in einer Spitze aus, die von dem in einen stumpfen Stift sich verlierenden Nagel unterstützt wird; das Ende i aber ist mit einer guten Bleyfeder versehen. Es ist von selbst offenbar, daß die korrespondirenden Abstände als d e und f g, d f und e g u. s. w. untereinander vollkommen gleich seyn müssen, wenn das Instrument der Erwartung entsprechen soll.

Rückwärts können in das Glas Quadrate eingeschnitten, oder auch mit Fäden gezogen werden. Wenn man das Querlineal h i beyderseits über f h und g i etwas verlängert, das Ende bey h zuspitzet, und jenes bey i mit dem Stifte bewafnet, so hat man denselben Erfolg zu gewärtigen.

Der Untersatz ist nur mit Schrauben zusammengesetzt, um ihn zerlegen und das Instrument bequem mitführen zu können.

Wenn man es anwenden will, so wird es mit dem Untersatze mittelst Schrauben auf einem Tische befestiget. Der Tisch wird so gestellt, wie man es bedarf, damit er sowohl als der Untersatz im Visiren nicht hindern und decken. Fährt man mit der Spitze h, indem sich diese auf den stumpfen Stift, der Stift aber auf die Glastafel lehnt, den durch das Absehen beobachteten Linien behutsam nach, so müssen sich selbe auf dem auf dem Zeichnungsbrette aufgespannten Papiere genau entwerfen. An Zeit wird man dabey gewiß beträchtlich gewinnen, wenn auch an Richtigkeit gegen die vorigen Angaben kein bedeutender Vortheil sich herauswerfen sollte.

§. 35.

Ein Instrument in gleicher Größe zu kopiren.

Ich weiß wohl, daß man von den Pantographen nicht vortheilhaft spricht, allein der, den ich zum Kopiren in gleicher Größe hier vorschlage, scheint doch eine Ausnahme zu machen, wenn er nur, welches eben nicht schwer ist, mit dem gehörigen Fleiße gebaut wird.

Auf dem Querlineal a b (Fig. 38.) bewegen sich nämlich zwey Längenlineale a c und b d um dieselben

zwo Schrauben, womit das Querlineal beym Gebrauche auf einem hinlänglich großen Tischblatte befestiget wird. Da das Vorragen der Schraubengriffe unter manchen Umständen hindern könnte, so rathe ich, selbe mit der Oberfläche der Längenlineale gleich auslaufen zu lassen Die Enden c und d werden durch ein überlegtes Querlineal cd genau in gleicher Entfernung von a und b und in derselben mit ab zusammengehängt; das übrige aber überhaupt so gebaut, wie das Objektiv bey Fig. 37. beschrieben ist; jedoch soll das Querlineal, welches zwar auch bey Fig. 37. nicht ohne Nutzen seyn würde, auf dem Lineale ce und df zu liegen kommen. Von den beyden Enden g und h kann eines wie das andere ihrer Bauart zufolge mit einem Stifte oder einer Bleyfeder versehen werden, je nachdem die Stelle dieser beyden besser zur Hand steht. Auf dem Querlineale ef kann der bequemern Behandlung wegen ein Griff befestiget werden.

Der allgemein bekannte Gebrauch dieses Instrumentes ist der Beschreibung nicht werth.

Wie das Zuleginstrument, das in §. 26. weitläufig beschrieben ist, in ein Kopirinstrument für alle Größen verwandelt werden könne, ist an dem gehörigen Orte schon erwähnt.

Verzeichniß
der
Verlagsbücher
in der
Anton Weber'schen Buchhandlung
in
Landshut 1805.

Anleitung, praktische, zur Verbesserung des Cassa- und Cameral-Rechnungswesen. gr. 8. 1803. 45 kr.

Anwendung des Galvanismus auf Heilung der Kranken ꝛc. Aus des Professor Webers Zeitschrift, „der Galvanismus genannt," ausgezogen. 8. 1802. 18 kr.

Bardili, C. W., Beytrag zur Beurtheilung des gegenwärtigen Zustandes der Vernunftlehre. gr. 8. 1802. 36 kr.

— — philosophische Elementarlehre, mit beständiger Rücksicht auf die ältere Literatur, 1s Heft. Druckp. 8. 1803. 45 kr.

Briefe eines Landmannes über die Seuchen und Krankheiten des Hornviehes. 8. 12 kr.

Etwas über die Bevölkerung in Baiern. 8. 10 kr.

Fabeln für unsere Zeiten und Sitten, rechtmäßige Original-Auflage. 8. 1800. 30 kr.

Feßmaier, J. G., Grundriß der historischen Hilfswissenschaften, vorzüglich nach Gatterer. gr. 8. 1802. 1 fl. 48 kr.

Gedanken über die Statue Sr. Königl. Hoheit des Friedensstifters Karls ꝛc. 1802. 9 kr.

Gemünden, G. P. von, Uebersicht der Weltgeschichte als Leitfaden für die Jugend bearbeitet. gr. 8. 1802. 36 kr.

Gerechtsame, über die landesherrliche, in geistlichen Sachen ꝛc., nebst ihrer Ausübung in Baiern. 8. 1802. 40 kr.

Gönner, Hofrath und Prof., über Cultur und Vertheilung der Gemeinweiden in rechtlicher Rücksicht. 8. 1803. 45 kr.

Grätzl, Jos., Rede für die öffentlichen bürgerlichen Schulen und von dem Einflusse der Lehrgegenstände auf die Entwicklung und Ausbildung bürgerlicher Tugenden. 8. 1803. 18 kr.

Hilger, Xav., Skizze zur Bearbeitung einer bleibenden Grundsteuer-Beschreibung für das Herzogth. Baiern und Pfalz, auch andere Staaten. 8. 1803. 15 kr.

Hupfauer, P., über die Schriften des passauischen Domherrn, Paulus Wann, mit literarischen Anmerkungen, und einer Digression über das Predigerwesen, mit 2 Kupf. 8. 1801. 45 kr.

Ideen zu einer guten Staatsverfassung und Regierung ꝛc. gr. 8. 1802. 54 kr.

Kapler, Lorenz, kleines Magazin für katholische Religions-Lehrer, Jahrgg. 1802 bis 1804. 8. Jeder Jahrg. 4 fl. 12 fl.

Katechismus für die größere Jugend. 8. 1799. 12 kr.

Koch, Andr., über die Regulierung der Lebensfunktionen bey Wunden ꝛc. 8. 1802. 18 kr.

Kulturproceß, neuester, in Baiern; aus aktenmäßigen Quellen. gr. 8. 1803. 45 kr.

Landtag im Herzogthum Baiern vom J. 1605; aus einer gleichzeitigen Handschrift. 1. und 2te Abtheil. gr. 8. 1802. 2 fl.

— — im Herzogthum Baiern 1514. 1te Verhandlung. gr. 8. 1803. 36 kr.

Levelings, D. H. von, Entwurf antropologischer Vorlesungen nach körperlichen Anlagen des Menschen. 8. 1800. 40 kr.

— — die ersten Grundsätze der Erregungstheorie für die Naturlehrer des Organism angehenden Aerzten und Philosophen ꝛc. gr. 8. 1802. 45 kr.

— — Nutzen, Plan und Umfang öffentlicher Vorlesungen über gerichtliche Arzneykunst und medizinische Polizeywissenschaft. 8. 1801. 24 kr.

Ma-

Magold, Maur., mathematisches Lehrbuch, öffentlich vorgelesen auf der Universität zu Landshut ꝛc. 1r Thl. gr. 8. 1802. 2 fl. 45 kr.

— — detto detto 2r Thl. detto 1803. 3 fl. 30 kr.

— — detto detto 3r Theil. 1te Abtheil., die Polygonometrie, und Markscheidekunst, und 1804. fl. kr.

— — detto detto 3r Thl. 2te Abtheil., die höhere Geometrie enthaltend. gr. 8. 1805. fl. kr.

Mindler, J., Geschichte und Statistik der baierschen Herrschaft Wertingen. gr. 8. 1803. 36 kr.

Rapsodien über das Taxwesen in Baiern. Ein Beytrag zur neuen Revision der baierschen Gesetze. gr. 8. 1802. 30 kr.

Sammlung kleiner Abhandlungen physikalischen, naturhistorischen und ökonomischen Inhalts. 2 Bändchen. gr. 8. 1804. 1 fl. 30 kr.

Schäbler's, Jos., Theorie der Geometrie und Trigonometrie, samt dem Wesentlichen der Praxis für Förster, Jäger ꝛc. mit 2 Kupf. 8. 30 kr.

Schmid, J. C., über die Duelle; eine politisch-juridische Beantwortung. gr. 8. 1803. 45 kr.

Schrank, Fr. v. Paula, Nebenstunden zur Erweiterung der Naturgeschichte. 2 Hefte. gr. 8. 1803. 1 fl. 30 kr.

Ueber den Werth und die Folgen ständischer Freyheiten in Baiern. 2te Aufl. gr. 8. 45 kr.

Weber, J., logica in usum eorum, qui eidem studeni. edit. nov. 8. 36 kr.

— — Metaphysik des Sinnlichen und Uebersinnlichen, mit Rücksicht auf die neueste Philosophie 8. 1801. 1 fl. 15 kr.

— — Vorlesungen aus der Naturlehre, reiner Thl. 8.

— — detto detto empirischer Thl. 8.

— — Mechanik und ihre gesammte Theile, mit Kupf. 8. 1 fl. 12 kr.

— — Chemie, physische, 2te neu umgearbeitete Aufl., mit Kupf. 8. 1 fl. 12 kr.

— — über die Luft, die gemeine, und die bey Auflösung der Körper erzeugte, mit Kpf. 8. 1801. 1 fl. 24 kr.

Weber,

Weber, über das Feuer, ganz neu umgearbeitet, mit Kupf. 8. 1804.

— — vollständige Lehre von den Gesetzen der Electricität, und Anwendung derselben, mit Kupf. 8. 1 fl. 15 kr.

— — über die Erde, Wasser und die Athmosphäre, mit Kupf. 3 Thle. 8. 2 fl.

— — die Spinnen sind Deuter des kommenden Wetters; eine Rede. 8. 1800. 12 kr.

— — Unterricht von den Verwahrungsmitteln gegen die Gewitter ꝛc. 8. 15 kr.

— — Gebethbuch, katholisches, für gemeine Leute. 3te Aufl. mit 1 Titelkupf. 8. 20 kr.

— — Erzählungen für Landleute. 8. 1804. 9 kr.

— — der Galvanismus. Eine Zeitschrift. 8. in 4 Heften, mit Kupf. jedes Heft à 54 kr. netto, 4 Hefte 3 fl. 36 kr. netto.

Weindler, Matth., Abhandlung über Vermuthungen, vorzüglich mit Hinsicht auf bürgerliche Rechtslehre, mit einer Vorrede des Hrn. Hofraths und Professor Gönner. gr. 8. 1802. 48 kr.

Welsch, J. B., Disquisitio critica de juramentis. 8. 1802. 40 kr.

— — Beytrag zur Geschichte, Topographie und Statistik von Pfalzbaiern. 8. 1802. 54 kr.

Wetzler, Joh. Ev., über die physische Schwäche der Frauenzimmer. 8. 1802. 12 kr.

— — über Aderlassen in Briefen ꝛc. 8. 12 kr.

— — über den Einfluß des Tanzens auf Gesundheit, nebst Verhaltungsregeln. 8. 1801. 8 kr.

Zimmer, Patric., Theologiae christianae specialis et theoreticae de Deo in se cum introductione pars I. gr. 8. 1802. 1 fl. 12 kr.

— — detto detto pars II. gr. 8. 1803. 1 fl. 36 kr.

— — detto detto pars III. gr. 8. 1804.

Tabelle

sowohl

der Seigerteufen und Breiten,

als

Söhlen und Längen

in 0,1 Theilen einer Prime

nach

der Decimaleintheilung,

das ist

für 1 Lachter = 10 Zehntel = 100 Zoll = 1000 Primen.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
0	1	29	26	23	20	17	14	11	8	5	3	89	59
	2	58	52	46	40	35	29	23	17	11	6		58
	3	87	78	70	61	52	43	35	26	17	8		57
	4	116	104	93	81	70	58	46	35	23	11		56
	5	45	31	116	101	87	72	58	43	29	14		55
	6	74	57	39	22	104	87	70	52	35	17		54
	7	203	183	163	142	122	102	81	61	40	20		53
	8	32	209	86	63	39	16	93	70	46	23		52
	9	61	35	209	83	57	31	104	78	52	26		51
	10	90	62	32	203	74	45	16	87	58	29		50
	11	319	88	56	24	92	60	28	96	64	32		49
	12	49	314	79	44	209	74	39	104	70	35		48
	13	378	340	302	266	227	189	141	113	75	38		47
	14	407	66	25	85	44	203	63	22	81	40		46
	15	36	92	49	305	61	18	74	31	87	43		45
	16	65	419	72	25	79	32	86	39	93	46		44
	17	94	45	95	46	96	47	98	48	99	49		43
	18	523	71	419	66	314	62	209	57	104	52		42
	19	552	497	442	386	331	276	221	165	110	55		41
	20	81	523	65	407	49	91	32	74	16	58		40
	21	610	49	88	27	66	305	44	83	22	61		39
	22	39	76	512	48	84	20	56	92	28	64		38
	23	69	602	35	68	401	34	67	200	34	67		37
	24	98	28	58	88	19	49	79	09	39	70		36
	25	727	654	581	509	436	363	291	218	145	72		35
	26	56	80	605	29	53	78	302	27	51	75		34
	27	85	707	28	49	71	92	14	35	57	78		33
	28	814	33	51	70	88	407	25	44	63	81		32
	29	43	59	75	90	506	21	37	53	68	84		31
	30	72	85	98	610	23	36	49	61	74	87		30
	31	901	811	721	631	541	451	360	270	180	90		29
	32	31	37	44	51	58	65	72	79	86	93		28
	33	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96		27
	34	89	90	91	92	93	94	95	96	98	99		26
	35	1020	916	814	712	613	509	407	305	203	102		25
	36	47	42	37	33	28	23	19	14	09	4	89	24

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
0	1	100000	90000	80000	70000	60000	50000	40000	30000	20000	10000	89	59
	2	99999	89999	79999	69999	59999	49999	39999	29999	19999			58
	3												57
	4												56
	5												55
	6												54
	7	99999	89999	79999	69999	59999	49999	39999	29999	19999	10000		53
	8												52
	9												51
	10												50
	11												49
	12												48
	13	99999	89999	79999	69999	59999	49999	39999	29999	19999	10000		47
	14												46
	15												45
	16	8											44
	17		8										43
	18			8									42
	19	99998	89998	79998	69998	59999	49999	39999	29999	19999	10000		41
	20					8							40
	21												39
	22	7					8						38
	23		7										37
	24												36
	25	99997	89997	79997	69998	59998	49998	39998	29999	19999	10000		35
	26				7								34
	27	6											33
	28												32
	29					7			8				31
	30		6	6									30
	31	99995	89996	79996	69997	59997	49998	39998	29998	19999	9999		29
	32				6		7						28
	33		5										27
	34												26
	35	4		5		6		7		8			25
	36											89	24

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
0	37	1076	968	861	753	645	538	430	323	215	107	89	23
	38	1105	95	84	73	63	52	42	32	21	10		22
	39	34	1021	907	94	80	67	53	40	27	13		21
	40	63	47	31	814	98	81	65	49	32	16		20
	41	92	73	54	35	715	96	77	57	38	19		19
	42	1221	99	77	55	33	611	88	66	44	22		18
	43	1250	1125	1000	875	750	625	500	375	250	125		17
	44	80	52	24	96	68	40	12	84	56	28		16
	45	1309	78	47	916	85	54	23	92	61	31		15
	46	38	1204	70	36	803	69	35	401	67	34		14
	47	67	30	93	57	20	83	47	10	73	36		13
	48	96	56	1117	77	37	98	58	19	79	40		12
	49	1425	1282	1140	997	855	712	570	427	285	142		11
	50	54	1309	63	1018	72	27	81	36	91	45		10
	51	83	35	86	38	90	41	93	45	96	48		9
	52	1512	61	1210	58	907	56	605	53	302	51		8
	53	41	87	33	79	25	71	16	62	08	54		7
	54	70	1413	56	99	42	85	28	71	14	57		6
	55	1600	1440	1280	1120	960	800	640	480	320	160		5
	56	29	66	1303	40	77	14	51	88	25	63		4
	57	58	92	26	60	94	29	63	97	31	66		3
	58	87	1518	49	81	1012	43	75	506	37	68		2
0	59	1716	44	73	1201	29	58	86	15	43	71		1
1	0	45	70	96	21	47	72	98	23	49	74	88	60
1	1	1774	1597	1419	1242	1064	887	709	532	355	177	88	59
	2	1803	1623	42	62	82	901	21	41	60	80		58
	3	32	49	66	82	1100	16	33	49	66	83		57
	4	61	75	89	1303	17	30	44	58	72	86		56
	5	90	1701	1512	23	34	45	56	67	78	89		55
	6	1919	27	35	44	52	60	68	76	84	92		54
	7	1949	1754	1559	1364	1169	974	779	584	389	195		53
	8	78	80	82	84	86	89	91	93	95	98		52
	9	2007	1806	1605	1405	1204	1003	802	602	401	200		51
	10	36	32	29	23	21	18	14	11	7	03		50
	11	65	58	52	45	39	32	26	19	13	06		49
	12	94	85	75	66	56	47	37	28	19	09	88	48

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
0 37	99994	89994	79995	69995	59996	49997	39997	29998	19998	9999	89 23
38	3					6					22
39			4								21
40		3			5			7			20
41	2										19
42				4							18
43	99992	89992	79993	69994	59995	49996	39996	29997	19998	9999	17
44	1					5					16
45					4						15
46		1	2	3				1			14
47	0										13
48											12
49	99989	89990	79991	69992	59993	49994	39995	29996	19997	9999	11
50											10
51											9
52	8	89	0	1							8
53					2						7
54	7	8				3				8	6
55	99987	89988	79989	69991	59992	49993	39994	29996	19997	9998	5
56	6			0							4
57		7			1			5			3
58	5		8			2					2
59		6		89							1
1 0	4		7		0		3		6		88 60
1 1	99984	89985	79987	69988	59990	49992	39993	29995	19996	9998	88 59
2	3		6			1					58
3		4			89			4			57
4	2			7							56
5		3	5				2				55
6	1				8	0					54
7	99981	89982	79984	69986	59988	49990	39992	29994	19996	9998	53
8	0										52
9	79	1	3	5	7	89	1	3	5		51
10											50
11	8	0	2								49
12				4	6						88 48
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
1 13	2123	1911	1698	1486	1274	1061	849	637	424	212	88 47
14	52	37	1722	1506	91	76	61	45	30	15	46
15	81	63	45	27	1309	90	72	54	36	18	45
16	2210	89	68	47	26	1105	84	63	42	21	44
17	39	2015	91	67	43	20	96	72	48	24	43
18	68	36	1815	88	61	34	907	80	53	27	42
19	2298	2068	1838	1608	1378	1149	919	689	459	230	41
20	2327	94	61	29	96	63	30	98	65	32	40
21	56	2120	84	49	1413	78	42	706	71	35	39
22	85	46	1908	69	31	92	54	15	77	38	38
23	2414	62	21	90	48	1207	67	24	83	41	37
24	43	99	54	1710	66	21	77	33	88	44	36
25	2472	2225	1978	1730	1483	1236	989	741	494	247	35
26	2501	51	2001	51	1501	50	1000	50	500	50	34
27	30	77	24	71	18	65	12	59	06	53	33
28	59	2303	47	91	35	79	24	68	12	56	32
29	88	29	71	1812	53	94	35	76	17	59	31
30	2617	56	941	32	70	1308	47	85	23	61	30
31	2646	2382	2117	1852	1588	1323	1058	794	529	264	29
32	76	2408	40	73	1600	38	70	802	35	67	28
33	2705	34	64	93	23	52	82	11	41	70	27
34	34	60	87	1914	44	67	93	20	47	73	26
35	63	86	2210	34	58	81	1105	29	52	76	25
36	92	2513	33	54	75	96	17	37	58	79	24
37	2821	2539	2257	1975	1692	1410	1128	846	564	282	23
38	50	65	80	95	1710	25	40	55	70	85	22
39	79	91	2303	2015	27	39	51	64	76	88	21
40	2908	2617	26	36	45	54	63	72	81	91	20
41	37	43	50	56	62	68	75	81	87	93	19
42	66	70	72	76	80	83	86	90	93	96	18
43	2995	2696	2396	2097	1797	1498	1198	898	599	299	17
44	3024	2722	2420	2117	1815	1512	1210	907	605	302	16
45	54	48	43	37	32	27	21	16	11	05	15
46	83	74	66	58	49	41	33	25	16	08	14
47	3112	91	89	78	67	56	45	33	22	11	13
48	41	2827	2513	98	84	70	56	42	28	14	88 12
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
1 13	99977	89979	79981	69984	59986	49988	39990	29993	19995	9997	88 47
14	6			3							46
15		8	0		5			2			45
16	5			2		7			4		44
17	4	7	79		4		89				43
18		6		1							42
19	99973	89976	79978	69981	59984	49986	39989	29992	19994	9997	41
20	2	5			3			1			40
21			7	0			8				39
22	1	4			2	5					38
23	0	3	6	79							37
24											36
25	99969	89972	79975	69978	59981	49984	39987	29990	19993	9997	35
26	8	1	4								34
27	7			7	0	3				6	33
28		0	3				6				32
29	6	69		6	79			89			31
30	5		2			2					30
31	99964	89968	79971	69975	59978	49982	39985	29989	19992	9996	29
32		7		4							28
33	3		0			1					27
34	2	6		3	7			8			26
35	1	5	69			0	4				25
36		4	8	2	6						24
37	99960	89964	79968	69972	59976	49980	39984	29988	19992	9996	23
38	59	3	7	1	5	79	3	7	1		22
39	8	2	6	0							21
40	7	1			4	8				5	20
41	6		5	69			2				19
42	5	0	4		3	7		6			18
43	99955	89959	79964	69968	59973	49977	39982	29986	19991	9995	17
44	4	8	3	7	2		1		0		16
45	3		2			6					15
46	2	7	1	6	1		0	5			14
47	1	6			0	5					13
48	0	5	0	5						88	12
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
1	49	3170	2853	2536	2219	1902	1585	1268	951	634	317	88	11
	50	3200	79	59	39	19	99	79	59	40	20		10
	51	28	2905	82	60	37	1614	91	68	45	23		9
	52	57	31	2606	80	54	28	1303	77	51	25		8
	53	86	57	29	2300	72	43	14	86	57	28		7
	54	3315	84	52	21	89	57	26	94	63	31		6
	55	3344	3010	2675	2341	2006	1672	1338	1003	669	334		5
	56	73	36	99	61	24	87	49	12	74	37		4
	57	3402	62	2722	82	41	1701	61	21	80	40		3
	58	32	88	45	2402	59	16	72	29	86	43		2
	59	61	3114	68	22	76	30	84	38	92	46		1
2	0	90	41	92	43	94	45	96	47	98	49	87	60
2	1	3519	3167	2815	2463	2111	1759	1407	1055	704	352	87	59
	2	48	93	38	83	29	74	19	64	09	55		58
	3	77	3219	61	2504	46	88	31	73	15	57		57
	4	3606	45	85	24	63	1803	42	82	21	60		56
	5	35	71	2908	44	81	17	53	90	27	63		55
	6	64	98	31	65	98	32	65	99	33	66		54
	7	3693	3324	2954	2585	2216	1846	1477	1108	738	369		53
	8	3722	50	78	2605	33	61	89	16	44	72		52
	9	51	76	3001	26	51	76	1500	25	50	75		51
	10	80	3402	24	46	68	90	12	34	56	78		50
	11	3809	28	47	66	86	1905	24	43	62	81		49
	12	38	55	71	87	2303	19	35	51	67	84		48
	13	3868	3481	3094	2707	2320	1934	1547	1160	773	386		47
	14	97	3507	3117	28	38	48	58	69	79	89		46
	15	3926	33	40	48	55	63	70	77	85	92		45
	16	55	59	64	68	73	77	82	86	91	95		44
	17	84	85	87	89	90	92	93	95	97	98		43
	18	4013	3612	3210	2809	2408	2006	1604	1204	802	401		42
	19	4042	3638	3233	2829	2425	2021	1617	1212	808	404		41
	20	71	64	57	50	42	35	28	21	14	07		40
	21	4100	90	80	70	60	50	40	30	20	10		39
	22	29	3716	3303	90	77	64	51	39	26	13		38
	23	58	42	27	2911	95	79	63	47	31	16		37
	24	87	69	50	31	2512	93	75	56	37	18	87	36

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
1 19	99949	89954	79959	69964	59969	49974	39979	29984	19989	9995	88 11
50	8	3									10
51	7		8	3	8	3				4	9
52	6	2	7	2							8
53	5	1	6	1	7	2		3			7
54		0			6						6
55	99944	89949	79955	69960	59966	49972	3997	29983	19988	9994	5
56	3	8	4		5	1		2			4
57	2	7	3	59			6				3
58	1	6	2	8	4	0					2
1 59	0										1
2 0	39	5	1	7	3	69	5	1		87	60
2 1	99938	89944	79950	69956	59963	49969	39975	29981	19987	9994	87 59
2	7	3	49		2	8				3	58
3	6	2		5	1		4				57
4	5	1	8	4		7		0			56
5	4	0	7	3	0		3		6		55
6	3	39	6		59	6					54
7	99931	89938	79945	69952	59959	49966	39972	29979	19986	9993	53
8	0	7	4	1	8	5					52
9	29	6	3	0	7						51
10	8	5	2			4	1	8	5		50
11	7	4	1	49	6	3				2	49
12	6	3		8	5		0				48
13	99925	89932	79940	69947	59955	49962	39970	2977	19985	9992	47
14	4	1	39		4		69				46
15	3	0	8	6	3	1		6	4		45
16	1	29	7	5			8				44
17	0	8	6	4	2	0					43
18	19	7	5	3	1	59	7	5			42
19	99918	89926	79934	69942	59951	49959	39967	2975	19983	9992	41
20	7	5	3		0	8	6			1	40
21	5	4	2	1	49			4			39
22	4	3	1	0		7					38
23	3	2		39	8	6	5		2		37
24	2	1	0	8	7			3			87 36
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Seigrteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
2 25	4216	3795	337	2951	2530	2108	1686	1265	843	421	87 35
26	45	3821	9	72	47	23	98	73	49	24	34
27	74	47	342	92	65	37	1710	82	55	27	33
28	4304	73	4	3012	82	52	21	91	60	30	32
29	33	99	6	33	99	66	33	1300	66	33	31
30	62	3925	3	53	2617	81	44	08	72	36	30
31	4391	3952	351	3073	2634	2195	1756	1317	878	439	29
32	4420	78	6	94	52	2210	68	26	84	42	28
33	49	4004	9	3114	69	24	79	34	90	45	27
34	78	30	2	34	87	39	91	43	95	48	26
35	4507	56	305	55	2704	53	1803	52	901	50	25
36	36	82	29	75	21	68	14	61	07	53	24
37	4565	4109	352	3195	2739	2282	1826	1369	913	456	23
38	94	35	75	3216	56	97	37	78	19	59	22
39	4623	61	98	36	74	2311	49	87	24	62	21
40	52	87	322	56	91	26	61	95	30	65	20
41	81	4213	45	77	2809	40	72	1404	36	68	19
42	4710	39	68	97	26	55	84	13	42	71	18
43	4739	4265	791	3317	2844	2370	1896	1422	948	474	17
44	68	92	315	38	61	84	1907	30	53	77	16
45	98	4317	38	58	78	99	19	39	59	80	15
46	4827	44	61	79	96	2413	30	48	65	82	14
47	56	70	84	99	2913	28	42	56	71	85	13
48	85	96	908	3419	31	42	54	65	77	88	12
49	4914	4422	931	3440	2948	2457	1965	1474	983	491	11
50	43	48	54	60	66	71	77	83	88	94	10
51	72	75	77	80	83	86	89	91	94	97	9
52	5001	4501	401	3501	3000	2500	2000	1500	1000	500	8
53	30	27	24	21	18	15	12	09	06	03	7
54	59	53	47	41	35	29	23	17	12	06	6
55	5088	4579	470	3562	3053	2544	2035	1526	1017	509	5
56	5117	4605	94	82	70	58	47	35	23	11	4
57	46	32	4117	3602	88	73	58	44	29	14	3
58	75	58	40	23	3105	87	70	52	35	17	2
2 59	5204	84	63	43	22	2602	82	61	41	20	87 1
3 0	33	4710	87	63	40	17	93	70	46	23	86 60
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
2 25	99911	89920	79929	69937	59946	49955	39964	29973	19982	9991	87 35
26	10	19	8								34
27	08	7	7	6	5	4	3	2	1		33
28	7	6	6	5	4	3				0	32
29	6	5	5	4	3		2				31
30	5	4	4	3		2		1			30
31	99903	89913	79923	69932	59942	49951	39961	29971	19980	9990	29
32	2	2	2	1	1			0			28
33	1	1	0	0	0	0	0				27
34	899	09	19	29	39	49	59				26
35	8	8	8					69	79		25
36	7	7	7	8	8	8				89	24
37	99895	89906	79916	69927	59937	49948	39958	29968	19979	9989	23
38	4	5	5	6	6	7	7				22
39	3	3	4	5		6			8		21
40	1	2	3	4	5		6	7			20
41	0	1	2	3	4	5					19
42	89	0	1	2	3	4	5	6	7		18
43	99887	89899	79910	69921	59932	49944	39955	29966	19977	9988	17
44	6	7	09	0	1	3	4				16
45	5	6	8	19		2		5			15
46	3	5	6	8	0	1	3		6		14
47	2	4	5	7	29			4			13
48	0	2	4	6	8	0	2				12
49	99879	89891	79903	69915	59927	49939	39951	29963	19976	9988	11
50	7	0	2	4	6				5	7	10
51	6	88	1	3	5	8	0				9
52	5	7	0	2		7		2			8
53	3	6	898	1	4	6	49		4		7
54	2	4	7	0	3		8	1			6
55	99870	89883	79896	69909	59922	49935	39948	29961	19974	9987	5
56	69	2	5	8	1	4	7	0	3		4
57	7	0	4	7	0	3				6	3
58	6	79	2	6	19		6	59			2
2 59	4	8	1	5	8	2	5				87 1
3 0	3	6	0	4	7	1			2		86 60
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
3 1	5262	4736	4210	3684	3157	2631	2105	1578	1052	526	86 59
2	91	62	33	3704	75	46	16	87	58	29	58
3	5320	88	56	24	92	60	28	96	64	32	57
4	49	4815	80	45	3210	75	40	1605	70	35	56
5	79	41	4303	65	27	89	51	13	75	38	55
6	5408	67	26	85	44	2704	63	22	81	41	54
7	5437	4893	4349	3806	3262	2718	2174	1631	1087	543	53
8	66	4919	72	26	79	37	86	39	93	46	52
9	95	45	96	46	97	47	98	48	99	49	51
10	5524	71	4419	67	3314	62	2209	57	1105	52	50
11	53	97	42	87	32	76	21	66	10	55	49
12	82	5024	65	3907	49	91	33	74	16	58	48
13	5611	5050	4489	3928	3366	2805	2244	1683	1122	561	47
14	40	76	4512	48	84	20	56	92	28	64	46
15	69	5102	35	68	3401	34	67	1700	34	67	45
16	98	28	58	89	19	49	79	09	39	70	44
17	5727	54	82	4009	36	63	91	18	45	72	43
18	56	80	4605	29	54	78	2302	27	51	75	42
19	5785	5207	4628	4050	3471	2892	2314	1735	1157	578	41
20	5814	33	51	70	88	2907	25	44	63	81	40
21	43	59	75	90	3506	21	37	53	68	84	39
22	72	85	98	4110	23	36	49	61	74	87	38
23	5901	5311	4721	31	41	51	60	70	80	90	37
24	30	37	44	51	58	65	72	79	86	93	36
25	5959	5363	4767	4171	3576	2979	2384	1788	1192	596	35
26	88	90	91	92	93	94	95	96	97	99	34
27	6017	5416	4814	4212	3610	3009	2407	1805	1203	601	33
28	46	42	37	33	28	23	18	14	09	04	32
29	76	68	60	53	45	38	30	22	15	07	31
30	6105	94	84	73	63	52	42	31	21	10	30
31	6134	5520	4907	4293	3680	3067	2453	1840	1226	613	29
32	63	46	30	4314	97	81	65	49	32	16	28
33	92	52	53	34	3715	96	76	57	38	20	27
34	6221	99	76	54	32	3110	88	66	44	22	26
35	50	5625	5000	75	50	25	2500	75	50	25	25
36	79	54	22	95	67	39	11	83	56	28	86 24
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
3	1	99861	89875	79889	69903	59917	49930	39944	29958	19972	9986	86	59
	2	0	4	8	2	6							58
	3	58	2	6	1	5	29	3	7	1			57
	4	7	1	5	899	4	8	2			5		56
	5	5	69	4	8	3	7		6				55
	6	3	8	3	7	2		1		0			54
	7	99852	89867	79881	69896	59911	49926	39941	29955	19970	9985		53
	8	0	5	0	5	0	5	0					52
	9	49	4	79	4	09	4	39	4	69			51
	10	7	2	8	3	8	3				4		50
	11	5	1	6	2	7		8	3				49
	12	4	59	5	1	6	2	7					48
	13	99842	89858	79874	69889	59905	49921	39937	29952	19968	9984		47
	14	1	6	2	8	4	0	6					46
	15	39	5	1	7	3	19	5	1				45
	16	7	3	0	6	2	8			7	3		44
	17	6	2	68	5	1		4	0				43
	18	4	0	7	4	0	7	3					42
	19	99832	89849	79866	69882	59899	49916	39933	29949	19966	9983		41
	20	1	7	4	1	8	5	2					40
	21	29	6	3	0	7	4	1	8				39
	22	7	4	2	79	6	3			5	2		38
	23	6	3	0	8	5		0	7				37
	24	4	1	59	6	4	2	29		4			36
	25	99822	89840	79858	69875	59893	49911	39929	29946	19964	9982		35
	26	0	38	6	4	2	10	8					34
	27	18	7	5	3	1	09	7	5	3			33
	28	7	5	3	2	0	8				1		32
	29	5	3	2	0	89	7	6	4				31
	30	3	2	0	69	8	6	5		2			30
	31	99811	89830	79849	69868	59887	49906	39924	29943	19962	9981		29
	32	10	29	8	7	6	5						28
	33	08	7	6	5	5	4	3	2	1			27
	34	6	5	5	4	3	3	2			0		26
	35	4	4	3	3	2	2		1				25
	36	2	2	2	2	1	1	1		0		86	24

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
3 37	6308	5677	5046	4415	3785	3154	2523	1892	1261	631	86 23
38	37	5703	69	36	3802	68	35	1901	67	33	22
39	66	29	93	56	19	83	46	10	73	36	21
40	95	55	5116	76	37	97	58	18	79	39	20
41	6424	81	39	97	54	3212	69	27	85	42	19
42	53	5808	62	4517	72	26	81	36	90	45	18
43	6482	5834	5186	4537	3889	3241	2593	1944	1296	648	17
44	6511	60	5209	58	3906	55	2604	53	1302	51	16
45	40	86	32	78	24	70	16	62	08	54	15
46	69	5912	55	98	41	84	27	71	14	57	14
47	98	38	78	4619	59	99	39	79	19	60	13
48	6627	64	5302	39	76	3313	51	88	25	62	12
49	6656	5990	5325	4659	3994	3328	2662	1997	1331	665	11
50	85	6017	48	80	4011	42	74	2005	37	68	10
51	6714	43	71	4700	28	57	85	14	43	71	9
52	43	69	94	20	46	71	97	23	48	74	8
53	72	95	5418	40	63	86	2709	31	54	77	7
54	6801	6121	41	61	81	3400	20	40	60	80	6
55	6830	6147	5464	4781	4098	3415	2732	2049	1366	683	5
56	59	73	87	4801	4115	29	44	58	72	86	4
57	88	99	5511	22	33	44	55	66	77	89	3
58	6917	6226	34	42	50	59	67	75	83	91	2
3 59	46	52	57	62	68	73	78	84	89	94	86 1
4 0	75	78	80	83	85	88	90	92	95	97	85 60
4 1	7004	6304	5603	4903	4202	3502	2802	2101	1401	700	85 59
2	33	30	27	23	20	07	13	10	06	03	58
3	62	56	50	44	37	31	25	19	12	06	57
4	91	82	73	64	55	46	36	27	18	09	56
5	7120	6408	96	84	70	60	48	36	24	12	55
6	49	34	5719	5005	90	75	60	45	30	15	54
7	7178	6461	5743	5025	4307	3589	2871	2153	1435	718	53
8	7207	87	66	45	24	3604	83	62	41	20	52
9	36	6513	89	65	42	18	94	71	47	23	51
10	66	39	5812	86	59	33	2906	79	53	26	50
11	95	65	36	5106	77	47	18	88	59	29	49
12	7324	91	59	26	94	62	29	97	64	32	85 48
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern,										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
3 37	99801	89820	79840	69860	59880	49900	39920	29940	19960	9980	86 23
38	799	19	39	59	79	899	19	39			22
39	7	7	7	8	8	8			59	79	21
40	5	6	6	6	7	7	8	8			20
41	3	4	4	5	6	6	7		8		19
42	1	2	3	4	5	5	6	7			18
43	99789	89810	79831	69852	59874	49895	39916	29937	19958	9979	17
44	7	09	0	1	2	4	5	6	7	8	16
45	6	7	28	0	1	3	4	5			15
46	4	5	7	48	0	2	3		6		14
47	2	4	5	7	69	1		4			13
48	0	2	4	6	8	0	2				12
49	99778	89800	79822	69844	59867	49889	39911	29933	19955	9978	11
50	6	798	1	3	5	8	0			7	10
51	4	7	19	2	4	7	09	2			9
52	2	5	8	0	3	6		1	4		8
53	0	3	6	39	2	5	8				7
54	68	1	4	8	1	4	7	0	3		6
55	99766	89789	79813	69836	59860	49883	39906	29930	19953	9976	5
56	4	8	1	5	58	2	5	29			4
57	2	6	0	3	7	1		8	2		3
58	0	4	08	2	6	0	4				2
3 59	58	2	6	1	5	79	3	7	1		86 1
4 0	6	0	5	29	4	3	2			5	85 60
4 1	99754	89779	79803	69828	59852	49877	39901	29926	19951	9975	85 59
2	2	7	2	6	1	6		5	0		58
3	0	5	0	5	0	5	0				57
4	48	3	798	3	49	4	899	4	49		56
5	6	1	7	2	7	3	8			4	55
6	4	69	5	1	6	2	7	3			54
7	99742	89767	79793	69819	59845	49871	39896	29922	19948	9974	53
8	0	6	2	8	4	0					52
9	38	4	0	6	2	69	5	1	7		51
10	5	2	88	5	1	8	4	0		3	50
11	3	0	7	3	0	6	3		6		49
12	1	58	5	2	39	5	2	19			85 48
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlag in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteuf und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
4 13	7353	6617	5882	5141	4411	3676	2941	2205	1470	735	85 47
14	82	46	5905	67	29	91	52	14	76	38	46
15	7411	69	28	81	46	3705	64	23	82	41	45
16	40	96	52	5208	64	20	76	32	88	44	44
17	69	6722	75	28	81	34	87	40	93	47	43
18	98	48	96	48	98	49	99	49	99	50	42
19	7527	6774	6021	5269	4516	3763	3010	2250	1505	752	41
20	56	6800	44	89	33	78	22	66	11	55	40
21	85	26	68	5309	51	92	34	79	17	58	39
22	7614	52	91	29	68	3807	45	84	22	61	38
23	43	78	6114	50	85	21	57	93	28	64	37
24	72	6904	37	70	4603	36	68	2301	34	67	36
25	7701	6931	6160	5390	4620	3850	3080	2310	1540	770	35
26	30	57	84	5411	38	65	92	19	46	73	34
27	59	83	6207	31	55	79	3103	27	51	76	33
28	88	7009	30	51	72	94	15	36	57	79	32
29	7817	35	53	72	90	3908	26	45	63	81	31
30	46	61	76	92	4707	23	38	53	60	84	30
31	7875	7087	6300	5512	4725	3937	3150	2362	1575	787	29
32	7904	7113	23	32	42	52	61	71	80	90	28
33	33	39	46	63	59	66	73	80	86	93	27
34	62	65	69	73	77	81	84	88	92	96	26
35	91	92	92	93	94	95	96	97	98	99	25
36	8020	7218	6416	5614	4812	4010	3208	2406	1604	802	24
37	8049	7244	6439	5634	4829	4024	3219	2414	1609	805	23
38	78	70	62	54	46	39	31	23	15	07	22
39	8107	96	85	75	64	53	42	32	21	10	21
40	36	7322	6508	95	81	68	54	40	27	13	20
41	65	48	32	5715	99	82	66	49	33	16	19
42	94	74	55	35	4916	97	77	58	38	19	18
43	8223	7400	6578	5756	4933	4111	3289	2467	1644	822	17
44	52	26	6601	76	51	26	3300	75	50	25	16
45	81	52	24	96	68	40	12	84	56	28	15
46	8310	79	48	5817	86	55	24	93	62	31	14
47	39	7505	71	37	5003	69	35	2501	67	34	13
48	67	31	94	57	20	84	47	10	73	36	85 12
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
4	13	99729	89756	79783	69810	59837	49864	39891	29918	19946	9973	85	47
	14	7	4	1	09	6	3			5	2		46
	15	5	2	0	7	5	2	0	7				45
	16	3	0	78	6	3	1	89		4			44
	17	0	48	6	4	2	0	8	6				43
	18	18	6	5	3	1	59	7	5	3			42
	19	99716	89744	79773	69801	59829	49858	39886	29915	19943	9971		41
	20	4	2	1	0	8	7	5	4				40
	21	2	0	69	798	7	6	4	3	2			39
	22	09	38	7	7	6	5						38
	23	7	6	6	5	4	3	3	2	1	0		37
	24	5	4	4	3	3	2	2	1				36
	25	99703	89732	79762	69792	59822	49851	39881	29911	19940	9970		35
	26	0	0	0	0	0	0	0	0				34
	27	698	28	59	89	19	49	79	09	39			33
	28	6	6	7	7	7	8	8			69		32
	29	4	3	4	6	6	7	7	8				31
	30	1	2	3	4	5	6	6	7	8			30
	31	99689	89719	79750	69782	59812	49844	39875	29907	19938	9969		29
	32	7	8	49	1		3		6	7	8		28
	33	5	6	8	79	1	2	4	5				27
	34	2	4	6	7	09	1	3	4	6			26
	35	0	2	4	6	8	0	2					25
	36	78	0	2	4	6	39	1	3	5			24
	37	99675	89708	79740	69773	59805	49837	39870	29902	19935	9967		23
	38	3	6	38	1	4	6	69		4			22
	39	1	3	6	69	2	5	8	1				21
	40	68	1	4	8	1	4	7	0	3			20
	41	6	699	3	6	799	3	6			6		19
	42	3	7	1	4	8	2	5	899	2			18
	43	99661	89695	79729	69763	59797	49830	39864	29898	19932	9966		17
	44	59	3	7	1	5	29	3	7	1			16
	45	6	1	5	59	4	8	2			5		15
	46	4	88	3	8	2	7	1	6				14
	47	1	6	1	6	1	6	0	5	0			13
	48	49	4	19	4	89	4	59	4			85	12

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
4 49	8396	7557	6717	5877	5038	4198	3358	2519	1679	839	85 11
50	8425	83	40	98	55	4213	70	27	85	42	10
51	54	7609	63	5918	73	27	82	36	91	45	9
52	83	35	87	58	90	42	93	45	96	48	8
53	8512	61	6810	59	5107	56	3405	54	1702	51	7
54	41	87	33	79	25	71	16	62	08	54	6
55	8570	7713	6856	5999	5142	4285	3428	2571	1714	857	5
56	99	39	79	6019	59	4300	40	80	20	60	4
57	8628	65	6903	40	77	14	51	88	25	63	3
58	57	92	26	60	94	29	63	97	31	65	2
4 59	86	7818	49	80	5212	43	74	2606	37	68	85 1
5 0	8715	44	72	6101	29	57	86	14	43	71	84 60
5 0	8715	7844	6972	6101	5229	4357	3486	2614	1743	871	84 60
5	860	974	7082	202	316	430	544	658	772	86	55
10	9005	8104	204	303	403	502	602	701	801	900	50
15	150	235	320	405	490	575	660	745	836	15	45
20	295	365	436	506	577	647	718	788	859	29	40
25	439	496	552	608	664	720	776	832	888	44	35
30	9584	8626	7667	6709	5750	4792	3834	2875	1917	958	30
35	729	756	783	810	837	864	891	919	946	73	25
40	874	886	899	912	924	937	949	962	975	87	20
45	10019	9016	8015	7013	6011	5009	4007	3005	2003	1002	15
50	163	147	131	114	098	081	065	049	032	16	10
5 55	308	277	246	215	185	154	123	092	061	31	84 5
6 0	10453	9407	8362	7317	6271	5226	4181	3136	2090	1045	83 60
5	597	537	478	418	358	298	239	179	119	59	55
10	742	668	593	519	445	371	297	222	148	74	50
15	886	798	709	620	532	443	356	266	177	88	45
20	11031	928	825	722	618	515	412	309	206	1103	40
25	176	10058	940	823	705	588	470	352	235	17	35
30	11320	10188	9059	7924	6792	5660	4528	3396	2264	1132	30
35	465	318	172	8025	879	732	586	439	293	46	25
40	609	448	287	126	965	804	643	482	322	61	20
45	753	578	403	227	7052	877	701	526	350	75	15
50	898	708	518	328	139	949	759	569	379	90	10
6 55	12042	838	634	429	225	6021	8171	612	408	1204	83 5
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern, 10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	Neigung.

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
4	49	99647	89682	79717	69752	59788	49823	39858	29894	19929	9964	85	11
	50	4	0	5	1	6	2	7	3				10
	51	2	77	3	49	5	1	6	2	8			9
	52	39	5	1	7	3	19	5					8
	53	7	3	09	6	2	8		1	7	3		7
	54	4	1	7	4	0	7	4	0				6
	55	99632	89669	79705	69742	59779	49816	39853	29889	19926	9963		5
	56	29	6	3	0	7	4	2					4
	57	7	4	1	39	6	3	1	8	5	2		3
	58	4	2	699	7	4	2	0	7				2
4	59	2	0	7	5	3	1	49	6	4		85	1
5	0	19	57	5	3	1	09	7				84	60
5	0	99619	89657	79695	69733	59771	49809	39847	29886	19924	9962	84	60
	5	06	46	85	24	64	03	42	82	21	60		55
	10	593	35	76	16	57	798	38	79	19			50
	15	80	22	64	06	48	90	32	74	16	58		45
	20	67	10	53	697	40	83	29	70	13	56		40
	25	53	598	42	87	32	76	21	66	10	55		35
	30	99539	89585	79631	69677	59723	49770	39816	29862	19908	9954		30
	35	25	73	20	68	15	62	10	57	05	52		25
	40	11	60	09	58	06	55	04	53	02	51		20
	45	497	47	597	47	698	48	798	49	899	49		15
	50	82	34	85	37	89	41	93	44	96	48		10
5	55	67	20	74	27	80	33	87	40	93	46	84	5
6	0	99452	89507	79561	69616	59671	49726	39781	29835	19890	9945	83	60
	5	37	493	49	06	62	18	74	31	87	43		55
	10	21	79	37	595	53	10	68	26	84	42		50
	15	05	65	24	84	43	03	62	21	81	40		45
	20	389	50	11	72	34	695	56	17	78	39		40
	25	73	36	499	61	24	86	49	12	74	37		35
	30	99357	89421	79485	69550	59614	49678	39743	29807	19871	9935		30
	35	40	06	72	38	04	70	36	02	68	34		25
	40	24	391	59	26	594	62	29	797	64	32		20
	45	07	76	45	14	84	53	22	92	61	30		15
	50	289	60	31	02	73	45	15	87	58	29		10
6	55	72	45	17	490	63	36	09	81	54	27	83	5

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
7	0	12187	10968	9749	8531	7312	6093	4874	3656	2437	1218	82	60
	5	331	11098	865	631	398	165	932	699	466	33		55
	10	475	229	980	733	485	238	990	742	495	47		50
	15	620	358	10096	834	572	310	5048	786	524	62		45
	20	764	487	211	935	658	382	105	829	553	76		40
	25	908	617	326	9036	745	454	163	872	581	91		35
	30	13052	11747	10442	9137	7831	6526	5221	3915	2610	1305		30
	35	197	877	558	237	918	597	278	959	639	19		25
	40	341	12007	672	338	8004	670	336	4002	668	34		20
	45	485	136	788	439	091	742	394	045	697	48		15
	50	629	266	903	540	177	814	451	088	726	63		10
7	55	773	396	11018	641	264	886	509	132	754	77	82	5
8	0	13917	12525	11134	9742	8350	6958	5567	4175	2783	1391	81	60
	5	14061	656	250	843	436	7030	624	218	812	406		55
	10	205	784	364	943	523	102	682	261	841	20		50
	15	349	914	479	10044	609	174	739	304	870	35		45
	20	493	13044	594	145	696	246	797	348	898	49		40
	25	637	173	709	246	782	318	855	391	927	63		35
	30	14781	13303	11824	10346	8868	7390	5912	4434	2956	1478		30
	35	924	432	940	447	955	462	970	477	985	92		25
	40	15068	561	12055	548	9041	534	6027	520	3013	1507		20
	45	212	691	170	648	127	606	085	563	042	21		15
	50	356	820	285	749	213	678	142	607	071	35		10
8	55	499	950	400	850	300	750	200	650	100	50	81	5
9	0	15643	14079	12515	10950	9386	7821	6257	4693	3128	1564	80	60
	5	787	208	629	11051	472	893	315	736	157	78		55
	10	930	337	744	151	558	965	372	779	186	93		50
	15	16074	467	859	252	644	8037	429	822	215	1607		45
	20	217	596	974	352	730	109	487	865	243	21		40
	25	361	725	13089	453	816	180	544	908	272	36		35
	30	16504	14854	13204	11553	9903	8252	6602	4951	3301	1650		30
	35	648	983	318	653	989	324	659	994	329	65		25
	40	791	15112	433	754	10075	395	716	5037	358	79		20
	45	935	241	548	854	161	467	774	080	387	93		15
	50	17078	370	662	954	247	539	831	123	416	1708		10
9	55	221	499	777	12055	333	610	888	166	444	22	80	5

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
7 0	99254	89329	79403	69478	59552	49627	39702	29776	19851	9925	82 60
5	36	13	389	65	42	18	694	71	47	23	55
10	18	297	75	53	31	09	87	65	43	22	50
15	00	80	60	40	20	00	80	60	40	20	45
20	182	64	45	27	09	591	73	54	36	18	40
25	63	47	30	14	498	81	65	49	32	16	35
30	99144	89230	79315	69401	59486	49572	39657	29743	19829	9914	30
35	25	13	00	387	75	62	50	37	25	12	25
40	06	195	285	74	63	53	42	32	21	10	20
45	086	78	69	60	52	43	34	26	17	08	15
50	67	60	53	47	40	33	26	20	13	06	10
7 55	47	42	37	33	28	23	18	14	09	04	82 5
8 0	99027	89124	79221	69318	59416	49513	39610	29708	19805	9902	81 60
5	06	06	05	04	04	03	02	02	01	00	55
10	98986	087	188	290	391	493	594	695	797	9898	50
15	65	68	72	75	79	82	86	89	93	96	45
20	44	49	55	61	66	72	77	83	89	94	40
25	23	30	38	46	53	61	69	77	84	92	35
30	98901	89011	79121	69231	59341	49450	39560	29670	19780	9890	30
35	880	88992	04	16	28	40	52	64	76	88	25
40	58	72	086	00	15	29	43	57	71	86	20
45	36	52	69	185	01	18	34	51	67	83	15
50	14	32	51	69	288	07	25	44	62	81	10
8 55	791	12	33	54	75	395	16	37	58	79	81 5
9 0	98769	88892	79015	69138	59261	49384	39507	29630	19753	9877	80 60
5	46	71	78996	22	47	73	498	23	49	74	55
10	23	50	78	06	33	61	89	17	44	72	50
15	699	29	59	089	19	50	80	10	40	70	45
20	76	08	41	73	05	38	70	03	35	67	40
25	52	787	22	56	191	26	61	595	30	65	35
30	98628	88765	78903	69040	59177	49314	39451	29588	19725	9863	30
35	04	44	883	23	62	02	41	81	21	60	25
40	580	22	64	06	48	290	32	74	16	58	20
45	55	00	44	68989	33	78	22	66	11	55	15
50	31	677	24	71	18	65	12	59	06	53	10
9 55	06	55	04	54	03	53	02	51	01	50	80 5
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
10 0	17365	15628	13892	12155	10419	8682	6946	5209	3473	1736	79 60
5	508	757	14006	253	505	754	7003	252	501	51	55
10	651	886	121	356	590	825	060	295	530	65	50
15	794	16015	235	456	676	897	117	338	559	79	45
20	937	143	350	556	762	968	175	381	587	93	40
25	18080	272	464	656	848	9040	232	424	616	1808	35
30	18223	16401	14579	12756	10934	9111	7289	5467	3644	1822	30
35	366	530	693	856	11020	183	346	510	673	36	25
40	509	658	807	956	105	254	403	553	702	51	20
45	652	787	922	13056	191	326	461	595	730	65	15
50	795	915	15036	156	277	397	518	638	759	79	10
10 55	938	17044	150	256	363	469	575	681	787	94	79 5
11 0	19081	17173	15264	13356	11448	9540	7632	5724	3816	1908	78 60
5	223	301	379	456	534	612	689	767	844	22	55
10	366	429	493	556	620	683	746	810	873	36	50
15	509	558	607	656	705	754	803	852	902	51	45
20	651	686	721	756	791	826	860	895	930	65	40
25	794	815	835	856	876	897	917	938	959	79	35
30	19936	17943	15949	13955	11962	9968	7974	5981	3987	1993	30
35	20079	18071	16063	14055	12047	10039	8031	6024	4016	2008	25
40	221	199	177	155	133	111	088	066	044	22	20
45	364	337	291	255	228	182	145	109	073	36	15
50	506	456	405	354	304	253	202	152	101	50	10
11 55	649	584	519	454	389	324	259	194	129	65	78 5
12 0	20791	18712	16633	14554	12474	10395	8316	6237	4158	2079	77 60
5	933	840	746	653	560	466	373	280	186	93	55
10	21075	968	860	753	645	538	430	322	215	2107	50
15	217	19096	974	852	730	609	487	365	243	21	45
20	360	224	17088	952	816	680	544	408	272	36	40
25	502	351	201	15051	901	751	600	450	300	50	35
30	21644	19479	17315	15150	12986	10822	8657	6493	4328	2164	30
35	786	607	428	250	13071	893	714	535	357	78	25
40	928	735	542	349	156	964	771	578	385	92	20
45	22069	862	655	449	242	11035	828	621	414	2207	15
50	211	990	769	548	327	105	884	663	442	21	10
12 55	353	20118	882	647	412	176	941	706	470	35	77 5
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
10 0	98480	88632	78784	68936	59088	49240	39392	29544	19696	9848	79 60
5	55	10	64	18	73	27	82	36	91	45	55
10	30	587	44	01	58	15	72	29	86	43	50
15	04	63	23	883	42	02	61	21	81	40	45
20	378	40	02	64	27	189	51	13	75	38	40
25	52	16	681	46	11	76	40	05	70	35	35
30	98325	88493	78660	68828	58995	49162	39330	29497	19665	9832	30
35	299	69	39	09	79	49	19	89	59	30	25
40	72	45	17	790	63	36	09	81	54	27	20
45	45	20	596	71	47	22	298	73	49	24	15
50	18	396	74	52	30	09	87	65	43	22	10
10 55	190	71	52	33	14	095	76	57	38	19	79 5
11 0	98162	88346	78530	68714	58897	49081	39265	29448	19632	9816	78 60
5	35	21	08	694	81	67	54	40	27	13	55
10	07	296	485	74	64	53	42	32	21	10	50
15	078	70	63	55	47	39	31	23	15	08	45
20	50	45	40	35	30	25	20	15	10	05	40
25	21	19	17	15	13	10	08	06	04	02	35
30	97992	88193	78394	68594	58795	48996	39197	29397	19598	9799	30
35	63	67	70	74	78	81	85	89	92	96	25
40	34	40	47	54	60	67	73	80	87	93	20
45	04	14	23	33	42	52	61	71	81	90	15
50	875	087	00	12	25	37	50	62	75	87	10
11 55	45	60	275	491	07	22	38	53	69	84	78 5
12 0	97814	88033	78252	68470	58689	48907	39126	29343	19563	9781	77 60
5	784	06	27	49	70	892	13	35	57	78	55
10	54	87978	03	27	52	77	01	26	40	75	50
15	23	50	178	06	34	61	089	17	44	72	45
20	692	23	53	384	15	46	77	07	38	69	40
25	61	895	28	62	596	30	64	298	32	66	35
30	97629	87876	78103	68340	58577	48815	39052	29289	19526	9763	30
35	598	38	078	18	59	799	39	79	19	60	25
40	66	10	53	296	39	83	26	70	13	56	20
45	34	781	27	74	20	67	13	60	07	53	15
50	02	52	01	51	01	51	01	50	00	50	10
12 55	469	22	77975	28	481	35	38988	41	494	47	77 5
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
13 0	22495	20245	17996	15746	13497	11247	8998	6748	4499	2249	76 60
5	637	373	18109	845	582	318	9054	791	527	63	55
10	778	500	222	945	667	389	111	833	555	78	50
15	920	628	336	16044	752	460	168	876	584	92	45
20	23061	755	449	143	837	530	224	918	612	2306	40
25	203	882	562	242	922	601	281	961	640	20	35
30	23344	21010	18675	16341	14006	11672	9338	7003	4669	2334	30
35	486	137	788	440	091	743	394	045	697	48	25
40	627	264	902	539	176	813	451	088	725	62	20
45	768	391	19015	638	261	884	507	130	753	77	15
50	910	519	128	737	346	955	564	173	782	91	10
13 55	24051	646	241	835	430	12025	620	215	810	2405	76 5
14 0	24192	21773	19353	16934	14515	12096	9677	7257	4838	2419	75 60
5	333	900	466	17033	600	166	733	300	866	33	55
10	474	22027	579	132	684	237	789	342	895	47	50
15	615	153	692	230	769	307	846	384	923	61	45
20	756	280	805	329	853	378	902	427	951	75	40
25	897	407	917	428	938	448	959	469	979	89	35
30	25038	22534	20030	17526	15023	12519	10015	7511	5007	2504	30
35	178	661	143	625	107	589	071	553	035	18	25
40	319	787	255	723	191	659	128	596	064	32	20
45	460	914	368	822	276	730	184	638	092	46	15
50	601	23040	480	920	360	800	240	680	120	60	10
14 55	741	167	593	18019	445	870	296	722	148	74	75 5
15 0	25882	23293	20705	18117	15529	12941	10352	7764	5176	2588	74 60
5	26022	420	818	215	613	13011	409	806	204	2602	55
10	162	546	930	314	697	081	465	849	232	16	50
15	303	673	21042	412	782	151	521	891	260	30	45
20	443	799	154	510	866	221	577	933	288	44	40
25	583	925	267	608	950	292	633	975	316	58	35
30	26724	24051	21379	18706	16034	13362	10689	8017	5344	2672	30
35	864	177	491	804	118	432	745	059	372	86	25
40	27004	303	603	903	202	502	801	101	401	2700	20
45	144	429	715	19001	286	572	857	143	429	14	15
50	284	555	827	099	370	642	913	185	457	28	10
15 55	424	681	939	196	454	712	969	227	484	42	74 5
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
13 0	97437	87693	77949	68206	58462	48718	38975	29231	19487	9743	76 60
5	04	63	23	183	42	02	61	21	81	40	55
10	371	34	897	60	22	685	48	11	74	37	50
15	38	04	70	36	02	69	35	01	67	34	45
20	04	574	43	13	382	52	21	191	61	30	40
25	271	43	16	089	62	35	08	81	54	27	35
30	97237	87513	77789	68066	58342	48618	38894	29171	19447	9723	30
35	03	482	62	42	21	01	81	61	40	20	25
40	168	52	35	18	01	584	67	50	33	17	20
45	134	20	07	67994	280	67	53	40	27	13	15
50	099	389	679	69	59	49	40	30	20	10	10
13 55	64	58	51	45	39	32	26	19	13	06	76 5
14 0	97029	87326	77623	67920	58217	48514	38812	29109	19406	9703	75 60
5	96994	295	595	890	196	497	797	098	399	9699	55
10	58	63	67	871	75	79	83	87	91	96	50
15	23	30	38	846	54	61	69	77	84	92	45
20	887	198	09	821	32	43	55	66	77	88	40
25	51	66	481	795	10	25	40	55	70	85	35
30	96814	87133	77452	67770	58089	48407	38726	29044	19363	9681	30
35	778	00	22	44	67	389	11	33	55	78	25
40	41	067	393	19	45	70	696	22	48	74	20
45	04	34	63	693	22	52	82	11	40	70	15
50	667	00	34	67	00	33	67	00	33	66	10
14 55	30	86967	04	41	57978	15	52	28989	26	63	75 5
15 0	96592	86933	77274	67615	57955	48296	38637	28977	19318	9659	74 60
5	55	899	44	588	33	77	22	66	11	55	55
10	17	65	13	62	10	58	06	55	03	51	50
15	478	31	183	35	887	39	591	43	295	48	45
20	40	796	52	08	64	20	76	32	88	44	40
25	02	61	21	481	41	01	60	20	80	40	35
30	96363	86726	77090	67454	57818	48181	38545	28909	19272	9636	30
35	24	691	59	27	794	62	29	897	65	32	25
40	285	56	28	399	71	42	14	85	57	28	20
45	45	21	76996	72	47	22	498	73	49	24	15
50	06	585	64	44	23	03	82	61	41	20	10
15 55	166	49	33	16	699	083	66	50	33	16	74 5
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
16 0	27563	24807	22051	19294	16538	13782	11025	8269	5512	2756	73 00
5	703	933	163	392	622	851	081	311	540	70	55
10	843	25059	274	490	706	921	137	353	568	84	50
15	983	184	386	588	789	991	193	395	596	98	45
20	28122	300	498	685	873	14061	249	436	624	2812	40
25	262	436	609	783	957	131	305	478	652	26	35
30	28401	25561	22721	19881	17041	14200	11360	8520	5680	2840	30
35	541	688	833	978	124	270	416	562	708	54	25
40	680	812	944	20076	208	340	472	604	736	68	20
45	819	937	23055	173	291	410	528	646	764	82	15
50	959	26063	167	271	375	479	583	687	791	96	10
16 55	29098	188	278	368	459	549	639	729	819	2910	73 5
17 0	29237	26313	23389	20466	17542	14618	11695	8771	5847	2923	72 00
5	376	438	501	563	625	688	750	813	875	37	55
10	515	563	612	660	709	757	806	854	903	51	50
15	654	688	723	758	792	827	861	826	931	65	45
20	793	813	834	855	876	896	917	938	958	79	40
25	932	938	945	952	959	966	972	979	986	93	35
30	30070	27063	24056	21049	18042	15035	12028	9021	6014	3007	30
35	209	188	167	146	125	104	083	062	042	21	25
40	348	313	278	243	208	174	139	104	069	34	20
45	486	437	389	340	292	243	194	146	097	48	15
50	625	562	500	437	375	312	250	187	125	62	10
17 55	763	687	610	534	458	381	305	229	152	76	72 5
18 0	30901	27811	24721	21631	18541	15451	12360	9270	6180	3090	71 60
5	31040	936	832	728	624	520	416	312	208	3104	55
10	178	28060	942	824	707	589	471	353	235	18	50
15	316	184	25053	921	790	658	526	395	263	31	45
20	454	309	163	22018	872	727	581	436	291	45	40
25	592	433	274	114	955	796	637	477	318	59	35
30	31730	28557	25384	22211	19038	15865	12692	9519	6346	3173	30
35	868	681	494	308	121	934	747	560	373	87	25
40	32006	805	605	404	203	16003	802	602	401	3200	20
45	144	929	715	500	286	072	857	643	428	14	15
50	281	29053	825	597	369	141	912	684	456	28	10
18 55	419	177	935	693	451	209	967	725	484	42	71 5
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
16 0	96126	86513	76901	67288	57675	48063	38450	28838	19225	9612	73 60
5	086	477	868	60	51	43	34	25	17	08	55
10	45	41	36	32	27	22	18	13	09	04	50
15	05	04	04	03	03	02	02	01	01	00	45
20	95964	367	771	175	578	47982	385	789	193	9596	40
25	23	31	38	46	54	61	69	77	84	92	35
30	95882	86293	76705	67117	57529	47941	38352	28764	19176	9588	30
35	40	56	672	088	04	20	36	52	68	84	25
40	799	19	39	59	479	899	19	39	59	80	20
45	57	181	05	30	54	78	03	27	51	75	15
50	15	43	572	00	29	57	286	14	43	71	10
16 55	673	05	38	66971	03	36	69	02	34	67	73 5
17 0	95630	86067	76504	66941	57378	47815	38252	28689	19126	9563	72 60
5	588	29	470	11	52	794	35	76	17	59	55
10	45	85990	36	881	27	72	18	63	09	54	50
15	02	51	01	51	01	51	00	50	00	50	45
20	458	13	367	21	275	29	183	3	091	46	40
25	15	873	32	790	49	07	66	24	83	41	35
30	95371	85834	76297	66760	57223	47686	38148	28611	19074	9537	30
35	28	795	62	29	196	64	31	598	65	33	25
40	284	55	27	698	70	42	13	85	56	28	20
45	39	15	191	67	43	19	096	72	48	24	15
50	195	675	56	36	17	597	78	58	39	19	10
17 55	50	35	20	05	090	75	60	45	30	15	72 5
18 0	95105	85595	76084	66574	57063	47553	38042	28531	19021	9510	71 60
5	060	54	48	42	36	30	24	18	12	06	55
10	15	14	12	10	09	07	06	04	03	01	50
15	94970	473	75976	479	56982	485	37988	491	18994	9497	45
20	24	32	39	47	54	62	69	77	85	92	40
25	878	390	02	15	27	39	51	63	75	88	35
30	94832	85349	75866	66382	56899	47416	37933	28449	18966	9483	30
35	786	07	29	50	71	393	14	36	57	78	25
40	39	265	791	17	43	70	896	22	48	74	20
45	693	23	54	285	16	46	77	08	38	69	15
50	46	181	17	52	787	23	58	394	29	64	10
18 55	599	39	679	19	59	299	39	79	20	60	71 5
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
19	0	32557	29289	26033	22778	19523	16278	13022	9767	6511	3255	70	60
	5	694	425	155	886	616	347	077	808	539	69		55
	10	831	548	265	982	699	416	132	849	566	83		50
	15	969	672	375	23078	781	484	187	890	594	97		45
	20	33106	796	485	174	864	553	242	932	621	3310		40
	25	243	919	595	270	946	621	297	973	648	24		35
	30	33381	30042	26704	23366	20028	16690	13352	10014	6676	3338		30
	35	517	166	814	462	110	759	407	055	703	51		25
	40	654	289	924	558	193	827	462	096	731	65		20
	45	791	412	27033	654	275	896	516	137	758	79		15
	50	928	535	143	750	357	964	571	178	785	93		10
19	55	34065	658	252	845	439	17032	626	219	813	3406	70	5
20	0	34202	30782	27361	23941	20521	17101	13681	10260	6840	3420	69	60
	5	338	904	471	24037	603	169	735	301	867	34		55
	10	475	31027	580	132	685	237	790	342	895	47		50
	15	611	150	689	228	767	306	844	383	922	61		45
	20	748	273	798	324	849	374	899	424	949	75		40
	25	884	396	907	420	930	442	953	465	977	88		35
	30	35020	31518	28016	24515	21012	17510	14008	10506	7004	3502		30
	35	157	641	125	610	094	578	062	547	031	15		25
	40	293	763	234	705	176	646	117	588	058	29		20
	45	429	886	343	800	257	714	171	628	086	43		15
	50	565	32008	452	895	339	782	226	669	113	56		10
20	55	701	131	560	990	420	850	280	710	140	70	69	5
21	0	35836	32253	28669	25085	21502	17918	14334	10751	7167	3583	68	60
	5	972	375	778	180	583	986	389	791	194	97		55
	10	36108	497	886	275	665	18054	443	832	221	3611		50
	15	244	619	995	370	746	122	497	873	248	24		45
	20	379	741	29103	465	827	189	551	913	276	38		40
	25	514	863	212	560	909	257	606	954	303	51		35
	30	36650	32985	29320	25655	21990	18325	14660	10995	7330	3665		30
	35	785	33107	428	749	22071	392	714	11035	357	78		25
	40	920	228	536	844	152	460	768	076	384	92		20
	45	37055	350	644	939	233	528	822	116	411	3705		15
	50	191	471	752	26033	314	595	876	157	438	19		10
21	55	325	593	860	128	395	663	930	197	465	32	68	5

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
19 0	94552	85096	75641	66186	56731	47276	37820	28365	18910	9455	70 60
5	04	54	03	53	02	52	01	51	01	50	55
10	456	11	565	19	674	28	782	37	891	45	50
15	09	84968	27	086	45	04	63	22	81	41	45
20	361	24	488	52	16	180	44	08	72	36	40
25	12	881	50	19	587	56	25	293	62	31	35
30	94264	84837	75411	65985	56558	47132	37705	28279	18853	9426	30
35	15	794	372	51	29	07	686	64	43	21	25
40	166	50	33	16	00	083	66	50	33	16	20
45	17	06	294	882	470	59	47	35	23	11	15
50	068	661	54	48	41	34	27	20	13	07	10
19 55	19	17	15	13	11	09	07	05	03	02	70 5
20 0	93969	84572	75175	65778	56381	46984	37587	28190	18794	9397	69 60
5	19	27	35	43	51	59	67	76	84	92	55
10	869	482	095	08	21	34	47	61	74	87	50
15	19	37	55	673	291	09	27	45	64	82	45
20	768	392	15	38	61	884	07	30	53	77	40
25	18	46	74974	02	31	59	487	15	43	72	35
30	93667	84300	74933	65567	56200	46833	37467	28100	18733	9366	30
35	16	254	893	31	169	08	46	085	23	61	25
40	565	08	52	495	39	782	26	69	13	56	20
45	13	162	11	59	08	56	05	54	02	51	15
50	462	15	769	23	077	31	384	38	692	46	10
20 55	10	069	28	387	46	05	64	23	82	41	69 5
21 0	93358	84022	74686	65350	56015	46679	37343	28007	18671	9336	68 60
5	06	83975	44	14	55983	53	22	27991	61	30	55
10	253	28	02	277	52	26	01	76	50	25	50
15	00	880	560	40	20	00	280	60	40	20	45
20	148	33	18	03	888	574	59	44	29	15	40
25	095	785	476	166	857	47	38	28	19	09	35
30	93041	83737	74433	65129	55825	46521	37216	27912	18608	9304	30
35	92988	689	390	092	793	494	195	896	597	9299	25
40	34	41	48	54	61	67	74	80	87	93	20
45	881	593	04	16	28	40	52	64	76	88	15
50	27	44	261	64979	696	13	30	48	65	82	10
21 55	772	495	18	41	63	386	09	32	54	77	68 5
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
22 0	37460	33714	29968	26222	22476	18730	14984	11238	7492	3746	67 60
5	595	836	30076	317	557	797	15038	278	519	59	55
10	730	957	184	411	638	865	092	319	546	73	50
15	865	34078	292	505	719	932	146	359	573	86	45
20	999	199	399	599	799	999	199	400	600	3800	40
25	38134	320	507	693	880	19067	253	440	626	13	35
30	38268	34441	30614	26788	22961	19134	15307	11480	7653	3827	30
35	402	562	722	882	23041	201	361	521	680	40	25
40	537	683	829	976	122	268	414	561	707	53	20
45	671	804	937	27069	202	335	468	601	734	67	15
50	805	924	31044	163	283	402	522	641	761	80	10
22 55	939	35045	151	257	363	469	575	681	788	94	67 5
23 0	39073	35165	31258	27351	23444	19536	15629	11722	7814	3907	66 60
5	207	286	365	445	524	603	682	762	841	20	55
10	340	406	472	538	604	670	736	802	868	34	50
15	474	527	579	632	684	737	789	842	895	47	45
20	608	647	686	725	764	804	843	882	921	61	40
25	741	767	793	819	845	870	896	922	948	74	35
30	39875	35887	31900	27912	23925	19937	15950	11962	7975	3987	30
35	40008	36007	32006	28005	24005	20004	16003	12002	8001	4001	25
40	141	127	113	099	085	070	056	042	028	14	20
45	274	247	219	192	165	137	110	082	055	27	15
50	407	367	326	286	244	204	163	122	081	40	10
23 55	540	486	432	378	324	270	216	162	108	54	66 5
24 0	40673	36606	32539	28471	24404	20337	16269	12202	8134	4067	65 60
5	806	726	645	564	484	403	322	242	161	80	55
10	939	845	751	657	563	469	375	281	188	94	50
15	41072	964	857	750	643	536	428	321	214	4107	45
20	204	37084	963	843	722	602	481	361	241	20	40
25	337	203	33069	936	802	668	534	401	267	33	35
30	41469	37322	33175	29028	24881	20734	16587	12440	8294	4147	30
35	601	441	281	121	961	801	640	480	320	60	25
40	734	560	387	213	25040	867	693	520	346	73	20
45	866	679	492	306	119	933	746	559	371	86	15
50	998	798	598	398	199	999	799	599	399	4200	10
24 55	42130	917	704	491	278	21065	85	639	426	13	65 5
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
22 0	92718	83446	74174	64903	55631	46359	37087	27815	18542	9272	67 60
5	664	397	31	864	598	32	65	00	32	66	55
10	09	48	087	26	65	04	43	782	22	61	50
15	554	298	43	788	32	277	21	66	11	55	45
20	499	49	73999	49	499	49	36999	49	499	50	40
25	43	199	55	10	66	21	77	33	88	44	35
30	92388	83149	73910	64671	55432	46194	36955	27716	18477	9239	30
35	32	099	865	32	399	66	33	699	66	33	25
40	276	48	21	593	65	38	10	83	55	27	20
45	20	82998	776	54	32	10	888	66	44	22	15
50	163	947	31	14	298	082	65	49	32	16	10
22 55	07	896	685	475	64	53	43	32	21	10	67 5
23 0	92050	82845	73640	64455	55230	46025	36820	27615	18410	9205	66 60
5	91993	794	599	395	196	45996	797	598	398	9199	55
10	36	42	49	55	62	68	74	81	87	93	50
15	879	691	03	15	27	39	51	63	76	88	45
20	21	39	457	275	093	11	28	46	64	82	40
25	764	587	411	34	58	882	05	29	52	76	35
30	91706	82535	73365	64194	55023	45853	36682	27512	18341	9170	30
35	648	483	18	53	54988	24	59	494	29	65	25
40	589	30	270	12	53	795	36	77	18	59	20
45	31	378	25	072	18	65	12	59	06	53	13
50	472	25	178	30	883	36	589	41	294	47	10
23 55	13	272	31	63989	48	07	65	24	82	41	66 5
24 0	91354	82219	73083	63948	54812	45677	36542	27406	18271	9135	65 60
5	295	165	36	06	777	47	18	388	59	29	55
10	36	12	72988	865	41	18	494	70	47	23	50
15	176	058	41	23	05	588	70	53	35	17	45
20	116	04	893	781	670	58	46	35	23	11	40
25	056	81950	45	39	34	28	22	17	11	05	35
30	90996	81896	72797	63697	54597	45498	36398	27299	18199	9099	30
35	35	42	48	55	61	68	74	80	87	93	25
40	875	786	00	12	25	37	50	62	75	87	20
45	14	33	651	570	488	07	25	44	63	81	15
50	753	678	02	27	52	376	01	26	50	75	10
24 55	692	23	553	484	15	46	277	07	38	69	65 5
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Grad.	Min.	Neigung.	Donlage in Lachtern. 10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	Neigung.	Grad.	Min.
			Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.												
25	0		42262	38035	33809	29583	25357	21131	16904	12678	8452	4226		64	60
	5		393	154	915	675	436	197	957	718	478	39			55
	10		525	272	34020	767	515	262	17010	757	505	52			50
	15		657	391	125	860	594	328	062	797	531	66			45
	20		788	509	230	952	673	394	115	836	557	79			40
	25		919	628	336	30044	752	460	168	876	584	92			35
	30		43051	38746	34441	30135	25830	21525	17220	12915	8610	4305			30
	35		182	864	546	227	909	590	273	954	636	18			25
	40		313	982	650	319	988	656	325	994	662	31			20
	45		444	39100	755	411	26066	722	378	13033	689	44			15
	50		575	218	860	503	145	787	430	072	715	57			10
25	55		706	335	965	594	224	853	482	112	741	70		64	5
26	0		43837	39453	35069	30686	26302	21918	17535	1315	8767	4383		63	60
	5		967	571	174	777	380	984	587	190	793	96			55
	10		44098	688	278	869	459	22049	639	229	819	4410			50
	15		229	806	383	960	537	114	691	268	845	23			45
	20		359	923	487	31051	615	179	743	307	872	36			40
	25		489	40040	591	142	693	244	796	340	898	49			35
	30		44619	40158	35696	31234	26772	22310	17848	13386	8924	4462			30
	35		750	275	800	325	850	375	900	425	950	75			25
	40		880	392	904	416	928	440	952	464	976	88			20
	45		45010	509	36008	507	27006	505	18004	503	9002	4501			15
	50		139	625	111	597	084	570	056	542	028	14			10
26	55		269	742	215	688	161	634	107	581	054	27		63	5
27	0		45399	40859	36319	31779	27239	22699	18159	13619	9080	4540		62	60
	5		528	975	423	870	317	764	211	658	105	53			55
	10		658	41092	526	960	395	829	263	697	131	66			50
	15		787	208	630	32051	472	893	315	736	157	78			45
	20		916	325	733	141	550	958	366	775	183	91			40
	25		46046	441	836	232	627	23023	418	813	209	4604			35
	30		46175	41557	36940	32322	27705	23087	18470	13852	9235	4617			30
	35		304	673	37043	412	782	152	521	891	260	30			25
	40		432	789	146	503	859	216	573	930	286	43			20
	45		561	905	249	593	937	280	624	968	312	56			15
	50		690	42021	352	683	28014	345	676	14007	338	69			10
27	55		818	137	455	773	091	409	727	045	363	82		62	5
Grad.	Min.		Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.											Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
25 0	90630	81567	72504	63441	54378	45315	36252	27189	18126	9063	64 60
5	569	12	455	398	41	284	27	70	14	57	55
10	07	456	06	55	04	53	03	52	01	50	50
15	445	01	356	12	267	22	178	33	089	44	45
20	383	345	06	268	30	191	53	15	76	38	40
25	21	289	257	24	192	60	28	096	64	32	35
30	90258	81232	72207	63181	54155	45129	36103	27077	18051	9026	30
35	196	176	156	37	17	098	078	58	39	19	25
40	33	19	06	093	079	66	53	40	26	13	20
45	070	063	056	55	42	35	28	21	14	07	15
50	06	06	05	04	04	03	02	02	01	00	10
25 55	89943	80948	71954	62960	53966	44971	35977	26983	17988	8994	61 5
26 0	89879	80891	71903	62915	53927	44939	35951	26964	17976	8988	63 60
5	15	34	852	871	889	07	26	44	63	81	55
10	751	776	01	26	51	875	00	25	50	75	50
15	687	18	750	781	12	43	875	06	37	68	45
20	23	660	698	36	773	11	49	887	24	62	40
25	558	02	46	690	35	779	23	67	11	56	35
30	89493	80544	71594	62645	53696	44746	35797	26848	17898	8949	30
35	28	485	41	00	57	14	71	28	85	43	25
40	363	27	490	554	18	681	45	09	72	36	20
45	298	368	38	08	578	49	19	789	59	30	15
50	32	09	386	462	39	16	693	69	46	23	10
26 55	166	250	33	16	00	583	66	50	33	16	63 5
27 0	89100	80190	71280	62370	53460	44559	35640	26730	17820	8910	62 60
5	034	31	27	24	20	17	14	10	07	03	55
10	88968	071	174	277	381	484	587	690	793	8896	50
15	01	11	21	31	41	51	60	70	80	90	45
20	35	79951	068	184	01	17	34	50	67	83	40
25	768	891	14	37	261	384	07	30	53	77	35
30	88701	79831	70961	62090	93220	44350	35480	26610	17740	8870	30
35	634	770	07	43	180	17	53	590	26	63	25
40	566	09	853	61996	40	283	26	70	13	56	20
45	498	649	799	49	099	49	399	49	699	50	15
50	431	588	44	01	58	15	72	29	86	43	10
27 55	363	5261	690	854	17	181	45	09	72	36	62 5
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
28 0	46947	42252	37557	32863	28168	23473	18779	14084	9389	4694	61 60
5	47075	368	660	953	245	537	830	122	415	4707	55
10	204	483	763	33042	322	602	881	161	440	20	50
15	332	598	865	132	399	666	932	199	466	33	45
20	460	714	968	222	476	730	984	238	492	46	40
25	588	829	38070	311	553	794	19035	276	517	59	35
30	47716	42944	38172	33401	28629	23858	19086	14314	9543	4771	30
35	843	43059	275	490	706	922	137	353	568	84	25
40	971	174	377	580	782	985	188	391	594	97	20
45	48099	289	479	669	859	24049	239	429	619	4810	15
50	226	403	581	758	936	113	290	468	645	22	10
28 55	353	518	683	847	29012	177	341	506	670	35	61 5
29 0	48481	43633	38784	33936	29088	24240	19392	14544	9696	4848	60 60
5	608	747	886	34025	165	304	443	582	721	61	55
10	735	861	988	114	241	367	494	620	747	73	50
15	862	976	39089	203	317	431	545	658	772	86	45
20	989	44090	191	292	393	494	595	696	797	99	40
25	49115	204	292	381	469	558	646	734	823	4911	35
30	49242	44318	39394	34470	29545	24621	19697	14772	9848	4924	30
35	369	432	495	558	621	684	747	810	873	37	25
40	495	545	596	646	697	747	798	848	899	49	20
45	621	659	697	735	773	811	848	886	924	62	15
50	748	773	798	823	848	879	899	924	949	74	10
29 55	874	886	899	911	924	937	949	962	974	87	60 5
30 0	50000	45000	40000	35000	30000	25000	20000	15000	10000	5000	59 60
5	126	113	100	088	075	063	050	037	025	12	55
10	251	226	201	176	151	126	100	075	050	25	50
15	377	339	302	264	226	188	151	113	075	37	45
20	503	452	402	352	301	251	201	151	100	50	40
25	628	565	502	440	377	314	251	188	125	63	35
30	50754	45678	40603	35527	30452	25376	20301	15226	10150	5075	30
35	879	791	703	615	527	439	351	263	176	88	25
40	51004	904	803	703	602	502	401	301	210	5100	20
45	129	46016	903	790	677	564	451	338	226	13	15
50	254	129	41003	878	752	627	501	376	251	25	10
30 55	379	241	103	965	827	689	551	413	276	38	59 5
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
28 0'	88294	79465	70636	61806	52977	44147	35318	26488	17659	8829	61 60
5	226	403	581	758	36	13	290	68	45	22	55
10	158	342	526	710	894	079	63	47	31	16	50
15	089	280	471	662	53	44	35	26	18	09	45
20	020	218	416	14	12	10	08	06	04	02	40
25	87951	156	361	565	770	43975	180	385	590	8795	35
30	87881	79093	70305	61517	52729	43941	35152	26364	17576	8788	30
35	812	031	249	468	687	06	25	43	62	81	25
40	742	78968	194	19	45	871	097	22	48	74	20
45	672	905	138	371	03	36	69	02	34	67	15
50	602	842	082	22	561	01	41	280	20	60	10
28 55	532	779	026	272	19	766	13	59	06	53	61 5
29 0	87462	78715	69969	61223	52477	43731	34984	26238	17492	8746	60 60
5	391	652	913	174	35	695	56	17	78	39	55
10	320	588	856	24	392	60	28	196	64	32	50
15	249	524	799	074	49	25	00	75	50	25	45
20	178	460	742	25	07	589	871	53	35	18	40
25	107	396	685	60975	264	53	43	32	21	10	35
30	87035	78332	69628	60925	52221	43517	34814	26116	17407	8703	30
35	86964	267	571	874	178	482	785	089	392	8696	25
40	892	202	513	24	35	46	56	67	78	89	20
45	820	138	456	774	092	10	28	46	64	82	15
50	747	073	398	23	48	374	699	24	49	74	10
29 55	675	007	340	672	05	37	70	02	35	67	60 5
30 0	86602	77942	69282	60621	51961	43301	34641	25980	17320	8660	59 60
5	529	876	223	571	18	265	12	59	06	53	55
10	456	811	165	19	874	28	582	37	291	45	50
15	383	745	107	468	30	191	53	15	76	38	45
20	310	679	048	17	786	55	24	893	62	31	40
25	236	613	68989	365	42	18	494	71	47	23	35
	30	86163	77546	68930	60314	51697	43081	34465	25849	17232	8616	30
	35	089	480	871	262	53	44	35	26	18	09	25
	40	015	413	812	10	09	07	06	04	03	01	20
	45	85940	346	752	158	564	42970	376	782	188	8594	15
	50	866	279	693	06	19	33	46	60	73	86	10
30	55	791	212	633	054	475	895	16	37	58	79	59 5
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
31 0	51504	46353	41203	36052	30902	25752	20601	15451	10300	5150	58 60
5	628	465	302	140	977	814	651	488	325	63	55
10	753	577	402	227	31051	876	701	526	350	75	50
15	877	689	502	314	126	938	751	563	375	87	45
20	52001	801	601	401	201	26001	800	600	400	5200	40
25	125	913	700	488	275	063	850	637	425	12	35
30	52250	47025	41800	36575	31350	26125	20900	15675	10450	5225	30
35	374	136	899	661	424	187	949	712	474	37	25
40	497	248	998	748	498	249	999	749	499	49	20
45	621	359	42097	835	573	310	21048	786	524	62	15
50	745	470	196	921	647	372	098	823	549	74	10
31 55	868	581	295	37008	721	434	147	860	573	87	58 5
32 0	52992	47692	42393	37094	31795	26496	21196	15897	10598	5299	57 60
5	53115	813	492	180	869	557	246	934	623	5311	55
10	238	914	590	267	943	619	295	971	647	24	50
15	361	48025	689	353	32017	680	344	16008	672	36	45
20	484	136	787	439	090	742	393	045	697	48	40
25	607	246	885	525	164	803	443	082	721	60	35
30	53730	48357	42984	37611	32238	26865	21492	16119	10746	5373	30
35	852	467	43082	696	311	926	541	155	770	85	25
40	975	577	180	782	385	987	590	192	795	97	20
45	54097	687	278	868	458	27048	639	229	819	5409	15
50	219	797	375	953	532	110	688	266	844	22	10
32 55	342	907	473	38039	605	171	736	802	868	34	57 5
33 0	54464	49017	43571	38124	32678	27232	21785	16339	10892	5446	56 60
5	586	127	668	210	751	293	834	375	917	58	55
10	707	237	766	295	824	354	883	412	941	70	50
15	830	346	863	380	897	414	931	448	966	83	45
20	951	456	960	465	970	475	980	485	990	95	40
25	55072	565	44058	550	33043	536	22029	521	11014	5507	35
30	55193	49674	44155	38635	33116	27597	22077	16558	11038	5519	30
35	315	783	252	720	189	657	126	594	063	31	25
40	436	892	349	805	261	718	174	631	087	43	20
45	557	50001	445	890	334	778	223	667	11111	55	15
50	678	110	542	974	406	839	271	703	135	67	10
33 55	798	218	639	39059	479	899	319	739	159	80	56 5
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
31	0	85716	77145	68573	60001	51430	42858	34286	25715	17143	8571	58	60
	5	641	077	513	59949	385	21	56	692	28	64		55
	10	566	010	453	896	40	783	26	70	13	56		50
	15	491	76942	393	44	294	45	196	47	098	49		45
	20	415	874	332	791	49	08	66	24	83	41		40
	25	340	806	272	38	04	670	36	02	68	34		35
	30	85264	76737	68211	59685	51158	42632	34105	25579	17053	8526		30
	35	188	669	150	31	12	594	075	56	37	19		25
	40	111	600	089	578	067	56	44	33	22	11		20
	45	035	531	028	24	21	17	14	10	07	03		15
	50	84958	462	67967	471	50975	479	33983	487	16991	8496		10
31	55	881	393	905	17	29	41	52	64	76	88	58	5
32	0	84805	76324	67844	59363	50883	42402	33922	25441	16961	8480	57	60
	5	727	255	782	09	36	364	891	18	45	72		55
	10	650	185	720	255	790	25	60	395	30	65		50
	15	572	115	628	01	43	286	29	72	14	57		45
	20	495	045	596	146	697	47	798	48	899	49		40
	25	417	75975	533	092	50	08	67	25	83	41		35
	30	84339	75905	67471	59037	50603	42169	33735	25301	16868	8434		30
	35	261	835	408	58983	556	30	04	278	52	26		25
	40	182	764	346	927	09	091	673	54	36	18		20
	45	104	693	283	872	462	52	41	31	20	10		15
	50	025	622	220	17	15	12	10	07	05	02		10
32	55	83946	551	157	762	367	41973	578	184	789	8394	57	5
33	0	83867	75480	67093	58707	50320	41933	33547	25160	16773	8386	56	60
	5	787	409	030	651	272	894	15	36	57	78		55
	10	708	337	66966	595	25	54	483	12	41	71		50
	15	628	265	903	40	177	14	51	088	25	63		45
	20	548	193	839	484	29	774	19	64	09	55		40
	25	468	122	775	428	081	34	387	40	693	47		35
	30	83388	75049	66711	58372	50033	41694	33355	25016	16677	8339		30
	35	308	74977	646	15	49985	54	23	24992	61	31		25
	40	227	905	582	259	36	14	291	68	45	22		20
	45	147	832	517	03	888	573	58	44	29	14		15
	50	066	759	453	146	39	33	26	20	13	06		10
33	55	82985	686	388	089	791	492	194	895	597	8298	56	5

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
34	0	55919	50327	44735	39143	33551	27959	22367	16775	11184	5592	55	60
	5	56040	436	832	228	624	28020	416	812	208	5604		55
	10	160	544	928	312	696	080	464	848	232	16		50
	15	280	652	45024	396	768	142	512	884	256	28		45
	20	400	760	120	480	840	203	560	920	280	40		40
	25	520	868	216	564	912	260	608	956	304	52		35
	30	56640	50976	45312	39648	33984	28320	22656	16992	11328	5664		30
	35	760	51074	408	732	34056	380	704	17028	352	76		25
	40	880	192	504	816	128	440	752	064	376	88		20
	45	999	299	599	899	200	500	800	100	400	5700		15
	50	57119	407	695	983	271	559	847	135	424	12		10
34	55	238	514	790	40067	343	619	895	171	447	24	55	5
35	0	57357	51622	45886	40150	34414	28679	22943	17207	11471	5735	54	60
	5	476	729	981	233	486	738	990	243	495	47		55
	10	595	836	46076	317	557	798	23038	278	519	59		50
	15	714	943	171	400	628	857	086	314	543	71		45
	20	833	52050	266	483	700	916	133	350	566	83		40
	25	952	156	361	566	771	976	180	385	590	95		35
	30	58070	52263	46456	40649	34842	29035	23228	17421	11614	5807		30
	35	188	369	551	732	913	094	275	456	637	19		25
	40	307	476	645	815	984	153	322	492	661	30		20
	45	425	582	740	897	35055	212	370	527	685	42		13
	50	543	688	834	980	125	271	417	563	708	54		10
35	55	661	794	928	41062	196	330	464	598	732	66	54	5
36	0	58778	52900	47023	41145	35267	29389	23511	17633	11755	5878	53	60
	5	896	53009	117	227	337	448	558	669	779	90		55
	10	59013	112	211	309	408	507	605	704	802	5901		50
	15	131	218	304	391	478	565	652	739	826	13		45
	20	248	323	398	473	549	624	699	774	849	25		40
	25	365	428	492	555	619	682	746	809	873	36		35
	30	59482	53534	47586	41637	35689	29741	23793	17844	11896	5948		30
	35	599	639	679	719	759	799	839	879	920	60		25
	40	716	744	772	801	829	858	886	914	943	71		20
	45	832	849	866	882	899	916	933	949	966	83		15
	50	949	954	956	964	969	974	979	984	989	95		10
36	55	60065	54058	48052	42045	36039	30022	24026	18019	12013	6006	53	5

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
34 0	82903	74613	66323	58032	49742	41452	33161	24871	16580	8290	55 60
5	822	540	258	57975	693	411	29	46	64	82	55
10	740	466	192	18	44	370	096	22	48	74	50
15	659	393	127	861	595	29	63	797	31	66	45
20	577	319	061	04	46	288	31	73	15	57	40
25	495	245	65996	746	497	47	32998	48	499	49	35
30	82412	74171	65930	57689	49447	41206	32965	24723	16482	8241	30
35	330	097	864	31	398	165	32	699	66	33	25
40	247	022	798	573	48	23	899	74	49	24	20
45	164	73948	731	15	299	082	66	49	33	16	15
50	081	873	665	457	49	41	32	24	16	08	10
34 55	81998	798	569	399	199	40999	799	599	399	00	55 5
35 0	81915	73723	65532	57340	49149	40957	32766	24574	16383	8191	54 60
5	831	648	465	282	099	16	32	49	66	83	55
10	748	573	398	23	49	874	699	24	49	75	50
15	664	497	331	165	48998	32	65	499	33	66	45
20	580	422	264	06	48	790	32	74	16	58	40
25	496	346	196	047	897	48	598	48	299	49	35
30	81411	73270	65129	56988	48847	40705	32564	24423	16282	8141	30
35	327	194	061	929	796	663	31	398	65	32	25
40	242	118	64994	869	45	21	497	72	48	24	20
45	157	041	926	10	694	578	63	47	31	15	15
50	072	72965	858	750	43	36	29	21	14	07	10
35 55	80987	888	789	691	592	493	395	296	197	8098	54 5
36 0	80901	72811	64721	56631	48541	40451	32360	24270	16180	8090	53 60
5	816	734	653	571	489	08	26	45	63	81	55
10	730	657	584	11	38	365	292	19	46	73	50
15	644	580	515	451	386	22	57	193	29	64	45
20	558	502	446	391	35	279	23	67	11	56	40
25	472	425	377	30	283	36	189	41	094	47	35
30	80385	72347	64308	56270	48231	40193	32154	24115	16077	8038	30
35	299	269	239	09	179	49	19	089	60	30	25
40	212	191	170	148	27	06	085	63	42	21	20
45	125	113	100	087	075	062	50	37	25	12	15
50	038	034	030	26	23	19	15	11	07	04	10
36 55	79951	71956	63961	55965	47970	39975	31980	23985	15990	7995	53 5
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
37	0	60181	54163	48145	42127	36109	30090	24072	18054	12036	6018	52	60
	5	297	268	238	208	178	149	119	089	059	29		55
	10	413	372	331	289	248	206	165	124	082	41		50
	15	529	476	423	370	317	264	211	159	106	53		45
	20	645	580	516	451	387	322	258	193	129	64		40
	25	760	684	608	532	456	380	304	228	152	76		35
	30	60876	54788	48701	42613	36525	30438	24350	18263	12175	6087		30
	35	991	892	793	694	595	495	396	297	198	99		25
	40	61106	996	885	774	664	553	442	332	221	6110		20
	45	221	55099	977	855	733	611	488	366	244	22		15
	50	336	203	49069	935	802	668	534	401	267	33		10
37	55	451	306	161	43016	871	725	580	435	290	45	52	5
38	0	61566	55409	49253	43096	36939	30783	24626	18470	12313	6156	51	60
	5	680	512	344	176	37008	840	672	504	336	68		55
	10	795	615	436	256	077	897	718	538	359	79		50
	15	909	718	527	336	145	954	763	573	382	91		45
	20	62023	821	619	416	214	31011	809	607	404	6202		40
	25	137	924	710	496	282	068	855	641	427	13		35
	30	62251	56026	49801	43576	37351	31125	24900	18675	12450	6225		30
	35	365	128	892	655	419	182	946	709	473	36		25
	40	479	231	983	735	487	239	991	743	495	48		20
	45	592	333	50074	814	555	296	25037	777	518	59		15
	50	705	435	164	894	623	353	082	811	541	70		10
38	55	819	537	255	973	691	409	127	845	563	82	51	5
39	0	62932	56639	50345	44052	37759	31466	25173	18879	12586	6293	50	60
	5	63045	740	436	131	827	522	218	913	609	6304		55
	10	158	842	526	210	894	579	263	947	631	16		50
	15	270	943	616	289	962	635	308	981	654	27		45
	20	383	57044	706	368	38030	692	353	19015	676	38		40
	25	495	146	796	447	097	747	398	048	699	49		35
	30	63608	57247	50886	44525	38164	31804	25443	19082	12721	6360		30
	35	720	348	976	604	232	860	488	116	744	72		25
	40	832	449	51065	682	299	916	533	149	766	83		20
	45	944	549	155	760	366	972	577	183	788	94		15
	50	64055	650	244	839	433	32028	622	216	811	6405		10
39	55	167	750	334	917	500	083	667	250	833	16	50	5

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
37	0	79863	71877	63891	55904	47918	39931	31945	23959	15972	7986	52	60
	5	776	798	820	843	865	888	10	32	55	77		55
	10	688	719	750	781	13	44	875	06	37	69		50
	15	600	640	680	20	760	00	40	880	20	60		45
	20	512	561	609	658	07	756	05	53	02	51		40
	25	423	481	539	596	654	12	769	27	884	42		35
	30	79335	71401	63468	55534	47601	39667	31734	23800	15867	7933		30
	35	246	322	397	472	548	23	698	774	49	24		25
	40	158	242	326	10	494	579	63	47	31	16		20
	45	069	162	255	348	41	34	27	20	13	07		15
	50	78980	082	184	286	388	490	592	694	796	7898		10
37	55	890	001	112	23	34	445	56	67	78	89	52	5
38	0	78801	70921	63041	55160	47280	39400	31520	23640	15760	7880	51	60
	5	711	840	62969	098	27	355	484	13	42	71		55
	10	621	759	897	35	173	11	48	586	24	62		50
	15	531	678	825	54972	19	266	12	59	06	53		45
	20	441	597	753	909	065	20	376	32	688	44		40
	25	351	516	681	846	10	175	40	05	70	35		35
	30	78261	70434	62608	54782	46956	39130	31304	23478	15652	7826		30
	35	170	353	536	19	02	085	268	51	34	17		25
	40	079	271	463	655	847	39	31	24	16	08		20
	45	77988	189	390	592	793	38994	195	396	597	7799		15
	50	897	107	318	29	38	48	59	69	79	89		10
38	55	806	025	245	464	683	03	22	42	61	80	51	5
39	0	77714	69943	62171	54400	46628	38857	31086	23314	15543	7771	50	60
	5	623	860	098	336	573	11	49	287	24	62		55
	10	531	778	025	272	18	765	12	59	06	53		50
	15	439	695	61951	07	463	19	30975	31	488	44		45
	20	347	612	877	143	08	673	39	04	69	34		40
	25	255	529	804	078	353	27	02	176	51	25		35
	30	77162	69446	61730	54013	46297	38581	30865	23148	15432	7716		30
	35	070	363	656	53949	42	35	28	21	14	07		25
	40	76977	279	581	884	186	488	791	093	395	7697		20
	45	884	195	507	19	30	42	53	65	77	88		15
	50	791	112	433	753	074	395	16	37	58	79		10
39	55	698	028	358	688	18	49	679	09	39	70	50	5

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	

Grad.	Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad.	Min.
40	0	64278	57851	51423	44995	38567	32139	25711	19283	12855	6428	49	60
	5	390	951	512	45073	634	195	756	317	878	39		55
	10	501	58051	601	151	707	250	800	350	900	50		50
	15	612	151	690	228	767	306	845	383	922	61		45
	20	723	251	778	306	834	361	889	417	944	72		40
	25	834	350	867	384	900	417	933	450	967	83		35
	30	64948	58450	51956	45461	38967	32472	25978	19483	12989	6495		30
	35	65055	549	52044	538	39033	527	26022	516	13011	6505		25
	40	165	649	132	616	099	583	066	549	033	16		20
	45	276	748	220	693	165	638	110	582	055	27		15
	50	386	847	309	770	231	693	154	616	077	38		10
40	55	496	946	397	847	297	748	198	649	099	49	49	5
41	0	65606	59045	52484	45924	39363	32803	26242	19681	13121	6560	48	60
	5	715	144	572	46000	429	858	286	714	143	71		55
	10	825	242	660	077	495	912	330	747	165	82		50
	15	934	341	747	154	560	967	374	780	187	93		45
	20	66044	439	835	230	626	33022	417	813	208	6604		40
	25	153	537	922	307	692	076	461	846	230	15		35
	30	66262	59636	53009	46383	39757	33131	26505	19878	13252	6626		30
	35	371	733	096	459	822	185	548	911	274	37		25
	40	479	831	183	535	887	239	592	944	296	48		20
	45	588	929	270	612	953	294	635	976	317	59		15
	50	696	60027	357	687	40018	348	678	20009	339	69		10
41	55	805	124	444	763	083	402	722	041	361	80	48	5
42	0	66913	60221	53530	46839	40148	33456	26765	20074	13382	6691	47	60
	5	67021	319	617	914	212	510	808	106	404	6702		55
	10	129	416	703	990	277	564	851	138	425	13		50
	15	236	513	789	47065	342	618	894	171	447	23		45
	20	344	610	875	141	406	672	937	203	469	34		40
	25	451	706	961	216	471	726	980	235	490	45		35
	30	67559	60803	54047	47291	40535	33779	27023	20267	13512	6756		30
	35	666	899	133	366	599	833	066	300	533	66		25
	40	773	996	218	441	664	886	109	332	554	77		20
	45	880	61092	304	516	728	940	152	364	576	88		15
	50	987	188	389	590	792	993	194	396	597	98		10
42	55	68093	284	474	665	856	34046	237	428	618	6809	47	5

Grad.	Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.	Grad.	Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
40 0	76604	68944	61283	53623	45962	38302	30641	22981	15321	7660	49 60
5	511	859	208	557	06	253	04	53	02	51	55
10	417	775	133	492	850	08	567	25	283	41	50
15	323	691	058	26	794	161	29	897	64	32	45
20	229	606	60983	360	37	14	491	68	46	23	40
25	135	521	908	294	681	067	54	40	27	13	35
30	76040	68436	60832	53228	45624	38020	30416	22812	15208	7604	30
35	75946	351	757	162	567	37973	378	784	189	7594	25
40	851	266	681	096	11	25	40	55	70	85	20
45	756	181	595	29	454	878	02	27	51	75	15
50	661	095	529	52963	397	30	264	698	32	66	10
40 55	566	009	453	896	39	783	26	70	13	56	49 5
41 0	75471	67924	60376	52829	45282	37735	30188	22641	15094	7547	48 60
5	375	838	300	763	225	687	50	12	75	37	55
10	280	752	224	696	168	40	12	584	56	28	50
15	184	665	147	28	110	592	073	55	36	18	45
20	088	579	070	561	053	44	35	26	17	09	40
25	74992	492	59993	494	44995	496	29996	497	14998	7499	35
30	74895	67406	59916	52427	44937	37447	29958	22468	14979	7489	30
35	799	319	839	359	879	399	19	39	60	80	25
40	702	232	762	291	21	51	881	10	40	70	20
45	605	145	684	224	763	03	42	381	21	60	15
50	509	058	607	156	05	254	03	52	01	51	10
41 55	411	66970	529	088	647	06	764	23	882	41	48 5
42 0	74314	66883	59451	52020	44588	37157	29725	22294	14863	7431	47 60
5	217	795	373	51952	30	08	687	65	43	21	55
10	119	707	295	883	471	059	48	36	24	12	50
15	022	619	217	15	13	11	08	06	04	02	45
20	73924	531	139	746	354	36962	569	177	784	7392	40
25	826	443	060	678	295	13	30	47	65	82	35
30	73727	66355	58982	51609	44236	36864	29491	22118	14745	7372	30
35	629	266	903	540	177	14	51	089	26	63	25
40	531	178	824	471	18	765	12	59	06	53	20
45	432	089	746	02	059	16	373	29	686	43	15
50	333	000	666	333	00	666	33	00	66	33	10
42 55	234	65911	587	264	43940	17	293	21970	47	23	47 5
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern.										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
43 0	68200	61380	54560	47740	40920	34100	27280	20460	13640	6820	46 60
5	306	475	645	814	983	253	322	492	661	30	55
10	412	571	730	888	41047	206	365	523	682	41	50
15	518	666	814	963	111	259	407	555	703	52	45
20	624	761	899	48039	174	312	449	587	725	62	40
25	730	856	983	110	237	364	491	618	746	73	35
30	68835	61952	55068	48185	41301	34417	27534	20650	13767	6883	30
35	941	62047	152	258	364	470	576	682	788	94	25
40	69046	141	237	332	427	523	618	714	809	6904	20
45	151	236	321	406	490	575	660	745	830	15	15
50	256	331	406	479	554	628	702	777	851	25	10
43 55	361	425	489	552	616	680	744	808	872	36	46 5
44 0	69466	62519	55572	48626	41677	34733	27786	20839	13893	6946	45 60
5	570	613	656	699	742	785	828	871	914	57	55
10	674	707	740	772	805	837	870	902	935	67	50
15	779	801	823	845	867	889	911	933	956	78	45
20	883	895	906	918	930	941	953	965	976	88	40
25	987	998	989	991	992	993	995	996	997	98	35
30	70091	63082	56072	49063	42054	35045	28036	21027	14018	7009	30
35	194	175	155	136	116	097	078	058	039	19	25
40	298	268	238	208	179	149	119	089	059	30	20
45	401	361	321	281	248	260	160	120	080	40	15
50	504	454	403	353	303	252	202	151	101	50	10
44 55	607	547	486	425	364	304	243	182	121	60	45 5
45 0	70710	63639	56568	49497	42426	35355	28284	21213	14142	7071	45 0
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Neigung.	Donlage in Lachtern,										Neigung.
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
Grad. Min.	Entsprechende Sohle und Länge in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.
43 0	73135	65822	58508	51194	43881	36567	29254	21940	14627	7313	46 60
5	036	732	429	25	21	18	14	11	07	03	55
10	72936	643	349	055	762	468	174	881	587	7293	50
15	837	553	269	50986	02	18	35	51	67	83	45
20	737	463	190	16	642	368	095	21	47	73	40
25	637	373	110	846	582	18	55	791	27	63	35
30	72537	65283	58030	50776	43522	36268	29015	21761	14507	7253	30
35	437	193	57949	06	462	18	28975	31	487	43	25
40	337	103	869	636	02	168	34	01	67	33	20
45	236	012	789	565	342	18	894	671	47	23	15
50	135	64922	708	495	281	068	54	40	27	13	10
43 55	035	831	628	24	21	17	14	10	07	03	64 5
44 0	71934	64740	57547	50353	43160	35967	28773	21580	14386	7193	45 60
5	833	649	466	283	099	16	33	50	66	83	55
10	731	558	385	12	39	866	692	19	46	73	50
15	630	467	304	141	42978	15	52	489	26	63	45
20	528	375	223	070	17	764	11	58	05	53	40
25	427	284	141	49999	856	13	570	28	285	42	35
30	71325	64192	57060	49927	42795	35662	28530	21397	14265	7132	30
35	223	100	56978	856	34	11	489	67	44	22	25
40	121	008	896	784	672	560	48	36	24	12	20
45	018	63916	815	13	11	09	07	05	03	02	15
50	70916	824	733	641	549	458	366	275	183	7091	10
44 55	813	732	650	569	488	06	25	44	62	81	45 5
45 0	70710	63639	56568	49497	42426	35355	28284	21213	14142	7071	45 0
Grad. Min.	Entsprechende Seigerteufe und Breite in 0,1 Theilen von Primen.										Grad. Min.

Fig. 80.

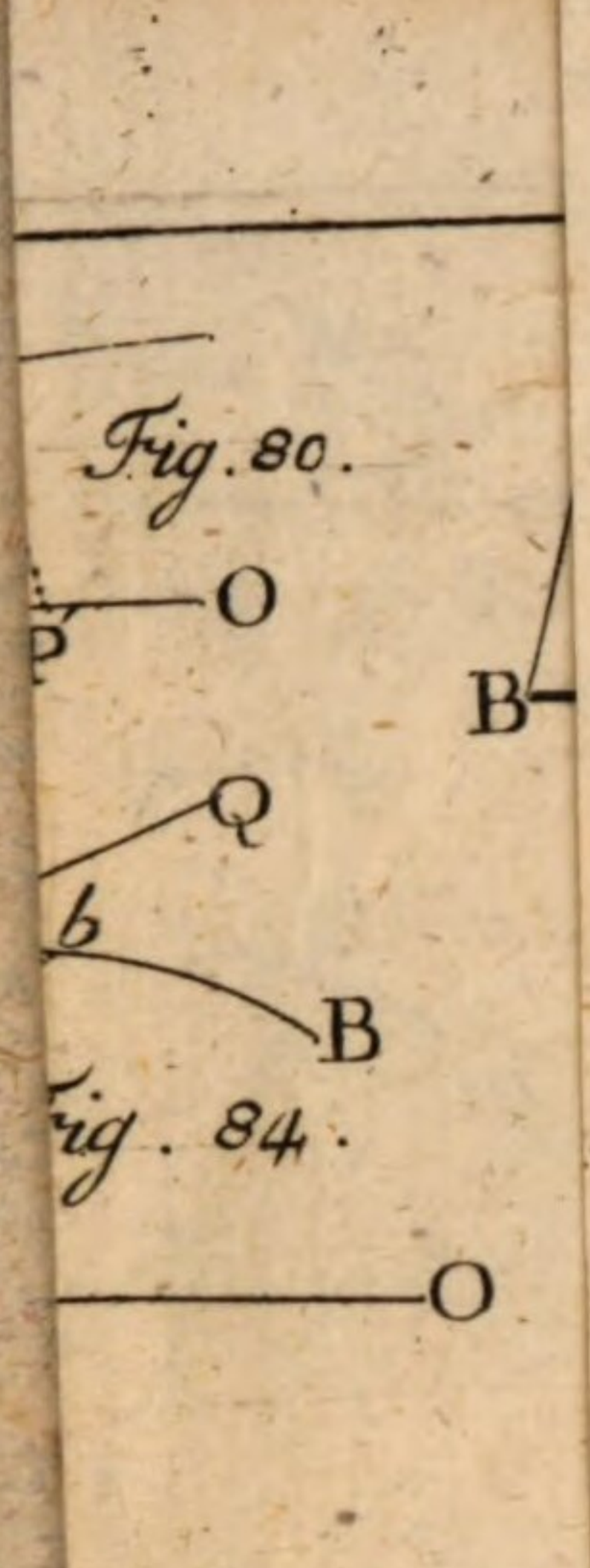
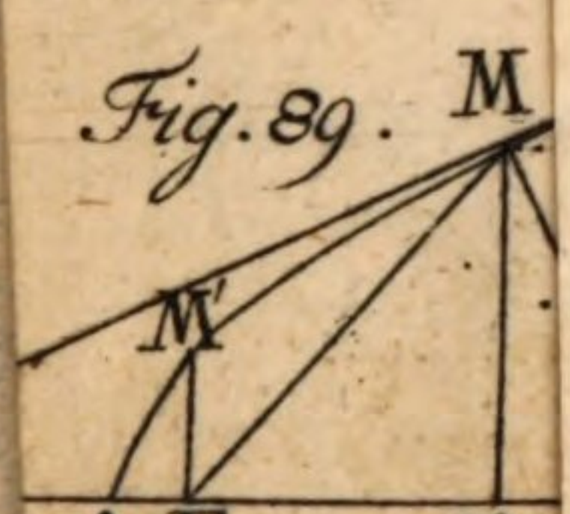


Fig. 84.

Fig. 89.



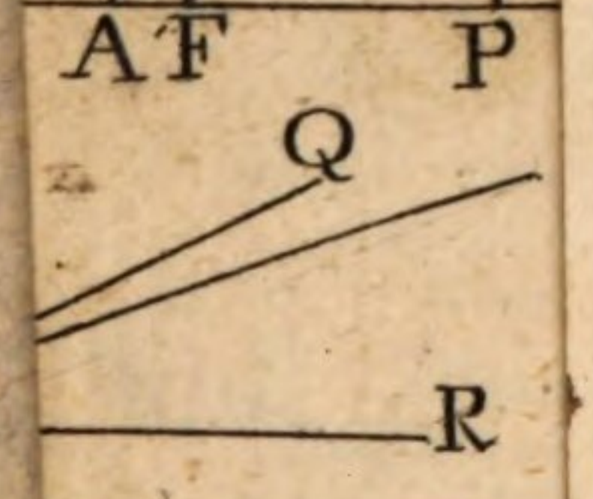
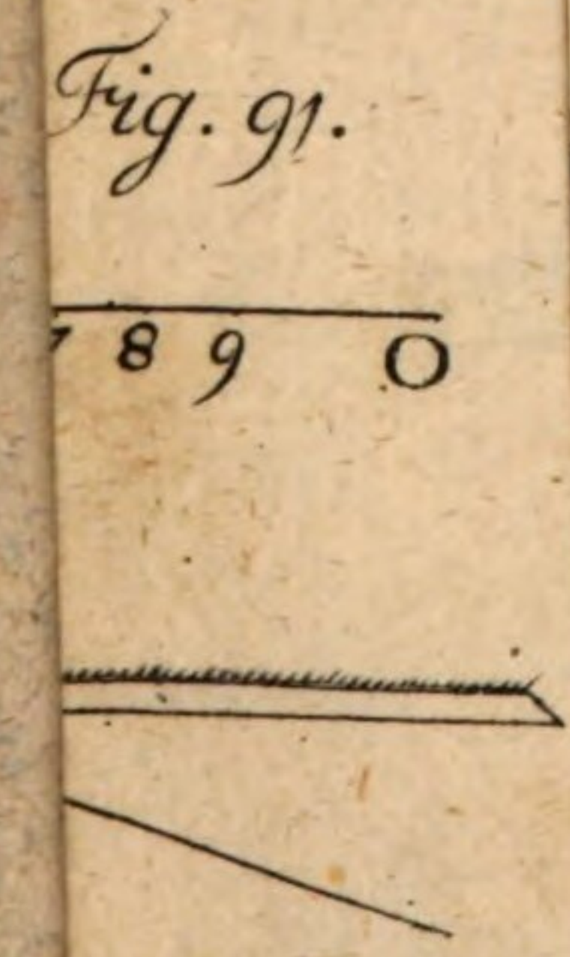


Fig. 91.



Fig

Fig.

Fig. 107.

Zu S. 252.

ialformeln.

$$\left(\frac{x-3}{x}\right)dx + C$$

$$\pi\left(\frac{3+x}{x}\right)dx + C$$

$$\ln|x| + \frac{3}{x} + \ln\left(\frac{x}{3}+3\right) + C$$

$$\ln|x| + C$$

II e.

ger zu §. 342.

	Länge des Faßes.			Mittlere arithmetische Länge
m.Zoll.	Fuß.	Duodec. Zoll.	Decim.Zoll.	Decimalzoll.
,083	1	$5\frac{1}{4}$	14,375	14,791
	1	$6\frac{1}{4}$	15,208	
	1	10	18,333	18,645
	1	$10\frac{3}{4}$	18,958	
,75	2	$1\frac{1}{4}$	21,041	21,353
	2	2	21,666	
6,354	1	$6\frac{1}{2}$	15,417	16,536
	1	$9\frac{3}{16}$	17,656	
6,25	1	$8\frac{3}{4}$	17,293	17,636
	1	$9\frac{9}{16}$	17,976	
6,25	1	$8\frac{7}{16}$	17,031	17,421
	1	$9\frac{3}{8}$	18,812	
7,813	3	$3\frac{6}{8}$	33,125	33,437
	3	$4\frac{1}{2}$	33,75	
0,677	4	$6\frac{13}{16}$	45,677	46,276
	4	$8\frac{1}{4}$	46,875	

abelle.

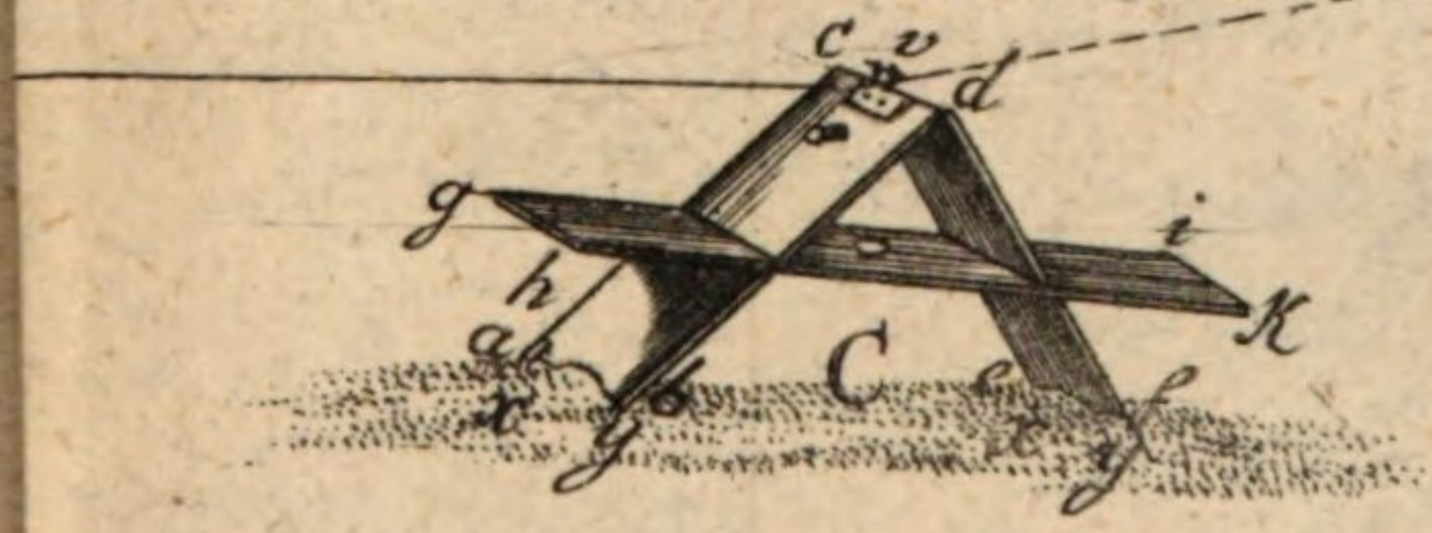
ißer zu §. 342.

ipsoid		als Paraboloid			als Conchoid			Inhalt durch Abeichen	
er	Maß.	Deci=mal=Cu=bikzoll.	Ei=mer.	Maß.	Deci=mal=Cu=bikzoll.	Ei=mer.	Maß.	Ei=mer.	Maß
–	$34\frac{40}{43}$	1494	0	$34\frac{32}{43}$	1484	0	$34\frac{22}{43}$	0	31
:	$6\frac{23}{43}$	2839	1	$6\frac{1}{43}$	2816	1	$5\frac{21}{43}$	1	1
:	$59\frac{3}{43}$	5081	1	$58\frac{7}{43}$	5047	1	$57\frac{16}{43}$	2	0
:	$14\frac{15}{43}$	3190	1	$14\frac{8}{43}$	3118	1	$12\frac{22}{43}$	1	$11\frac{1}{2}$
:	$16\frac{25}{43}$	3274	1	$16\frac{6}{43}$	3258	1	$15\frac{33}{43}$	1	$11\frac{1}{4}$
:	$15\frac{33}{43}$	3246	1	$15\frac{21}{43}$	3233	1	$15\frac{8}{43}$	1	$11\frac{1}{4}$
7	$7\frac{32}{43}$	18325	7	$6\frac{7}{43}$	18241	7	$4\frac{9}{43}$	7	1
1	$16\frac{7}{43}$	54704	21	$12\frac{8}{43}$	54504	21	$7\frac{23}{43}$	21	14
5	$51\frac{6}{43}$	92153	35	$43\frac{4}{43}$	91701	35	$32\frac{25}{43}$	35	21

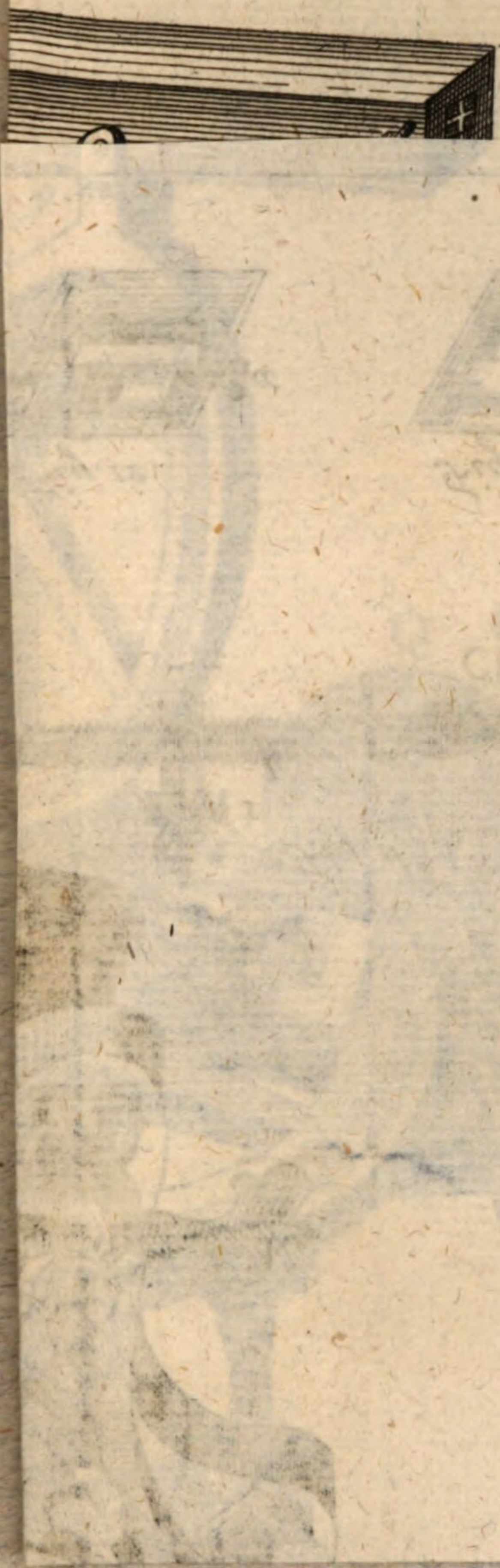
Tab. I.
Voiths Abh.

Fig. 8.

Fig. 7.



Tab. II.



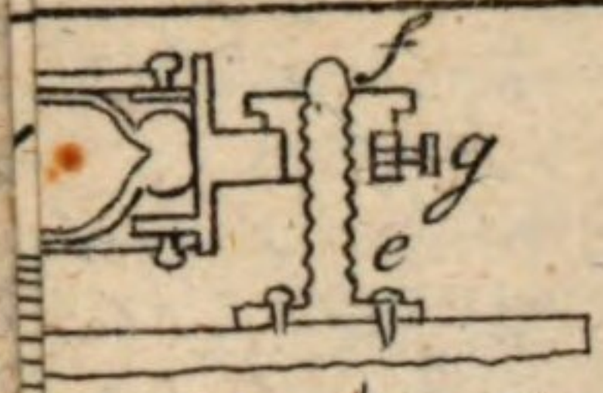


Fig. 20.

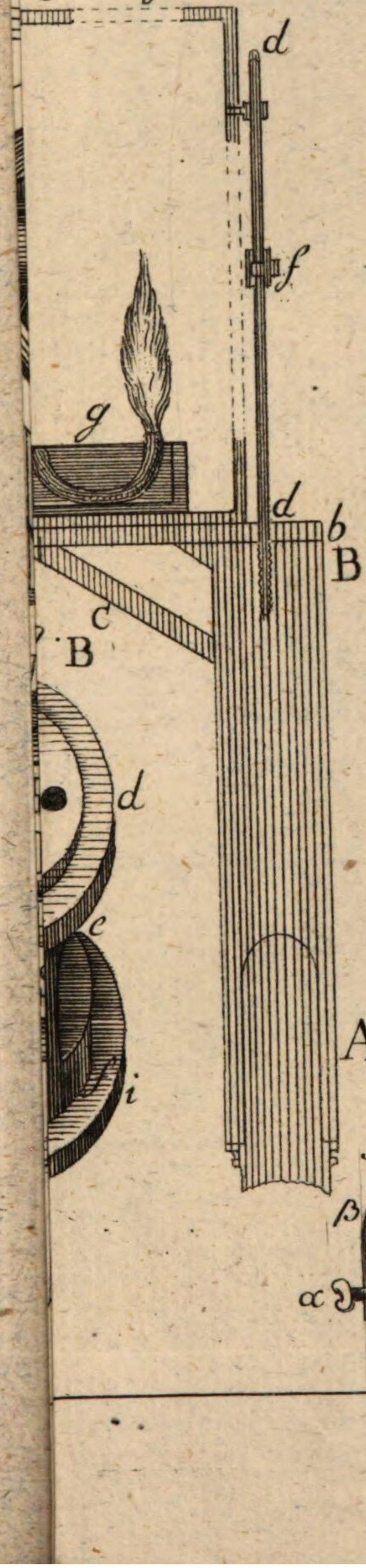


Fig. 24.

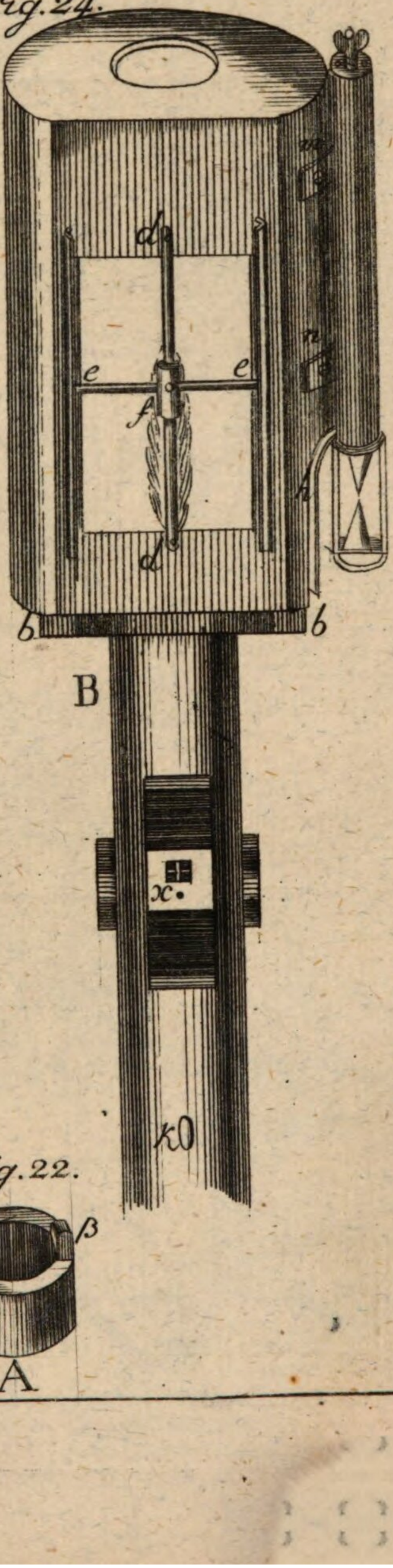
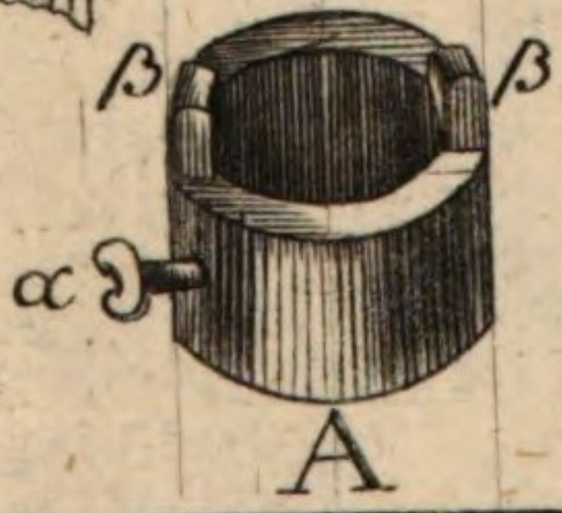


Fig. 22.



Tab. IV.
Voiths Abh.

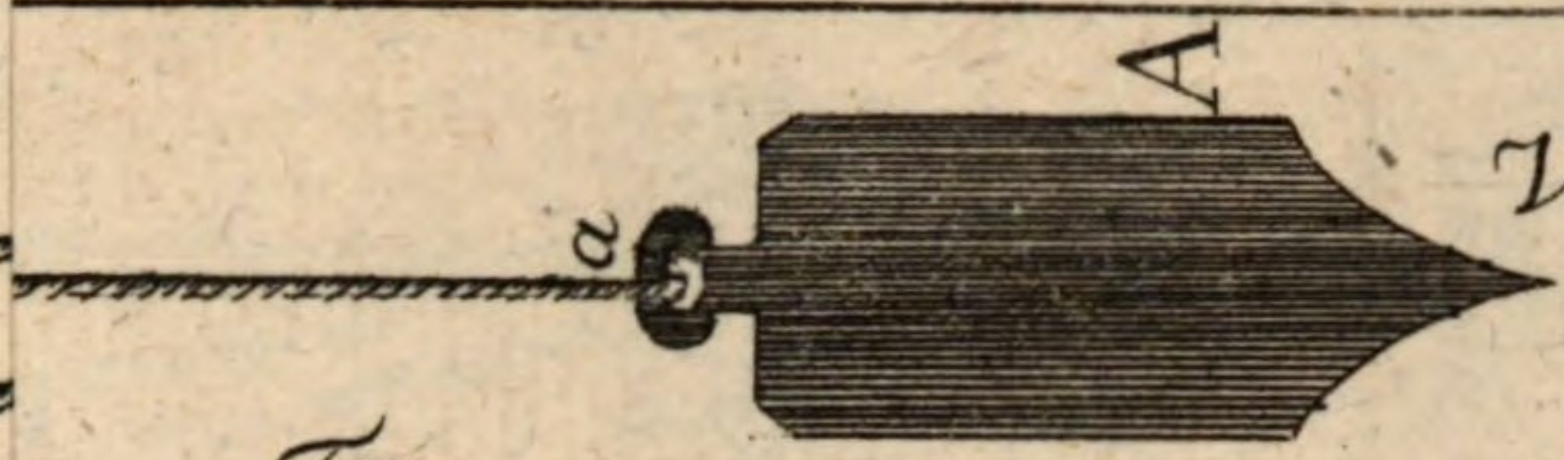
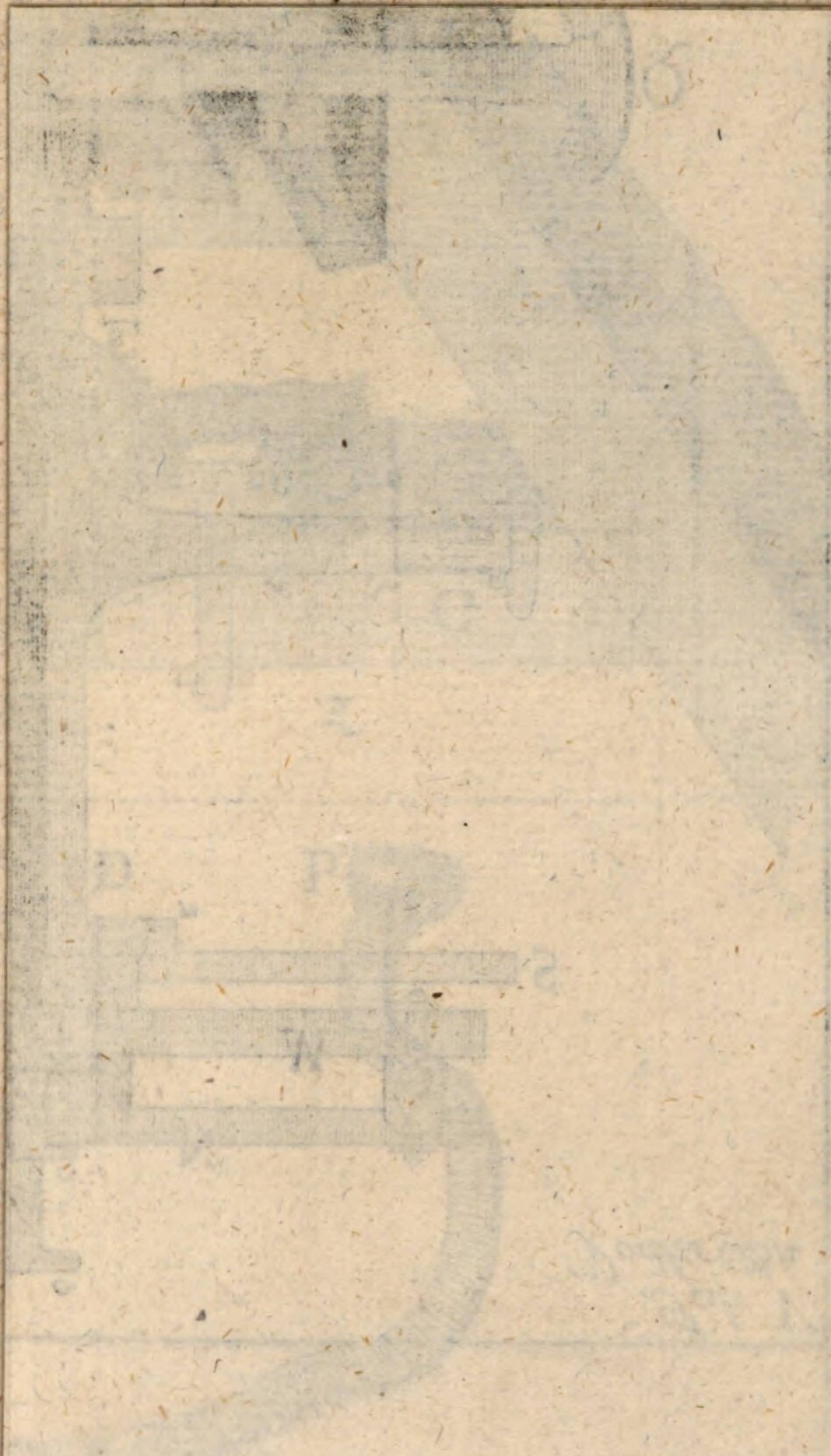
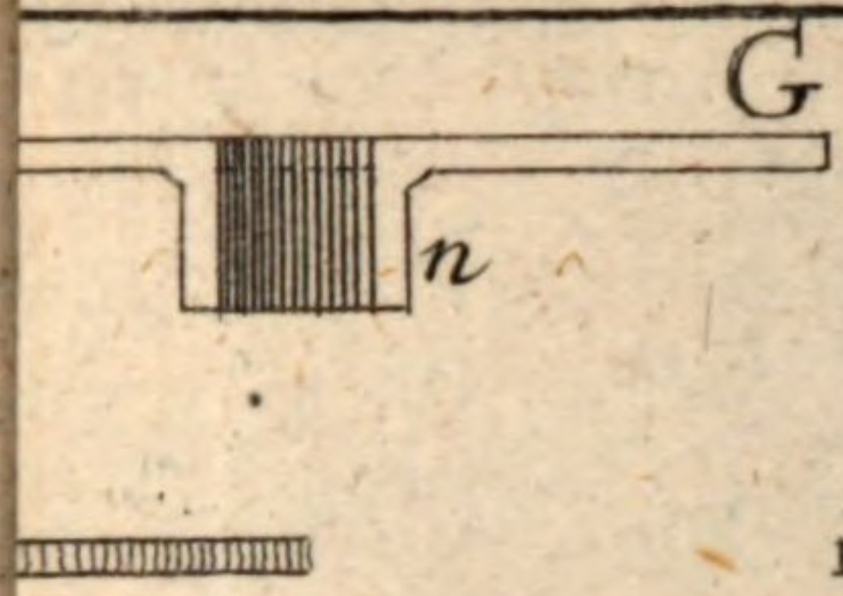
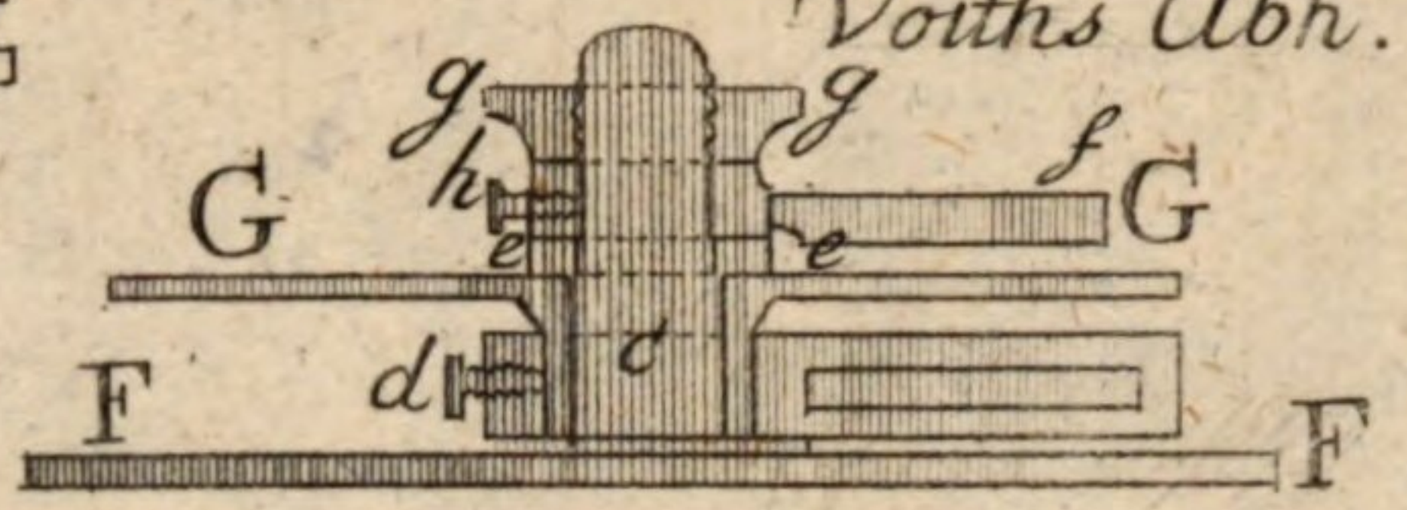


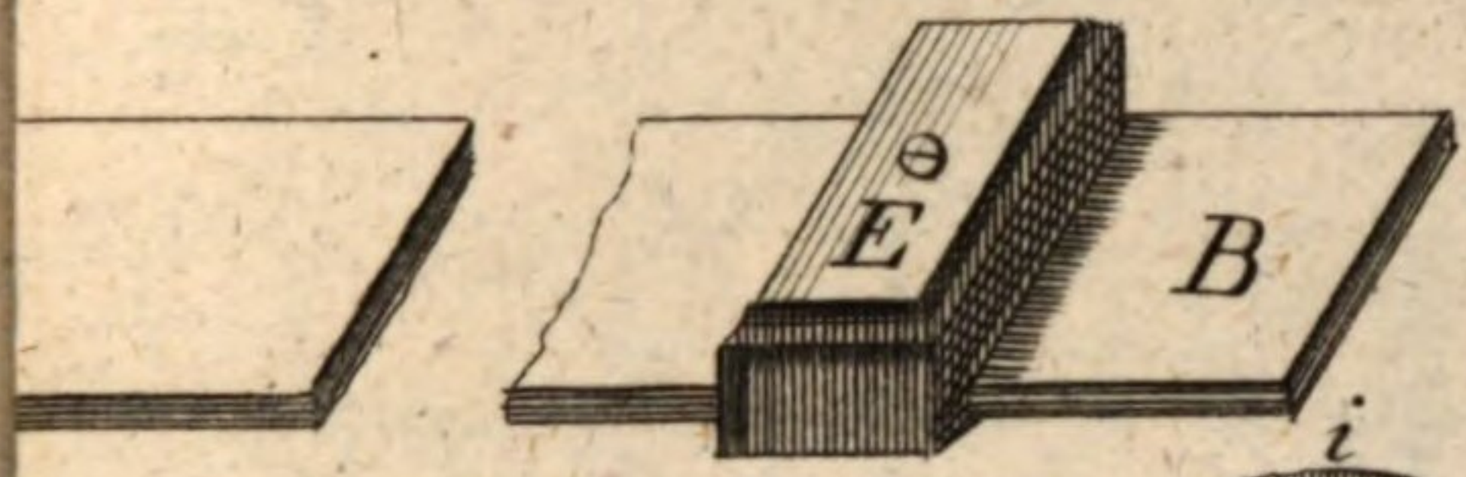
Fig. 23.

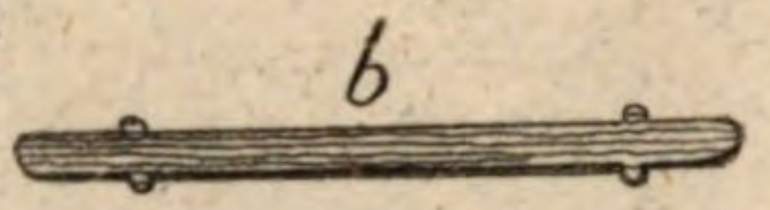


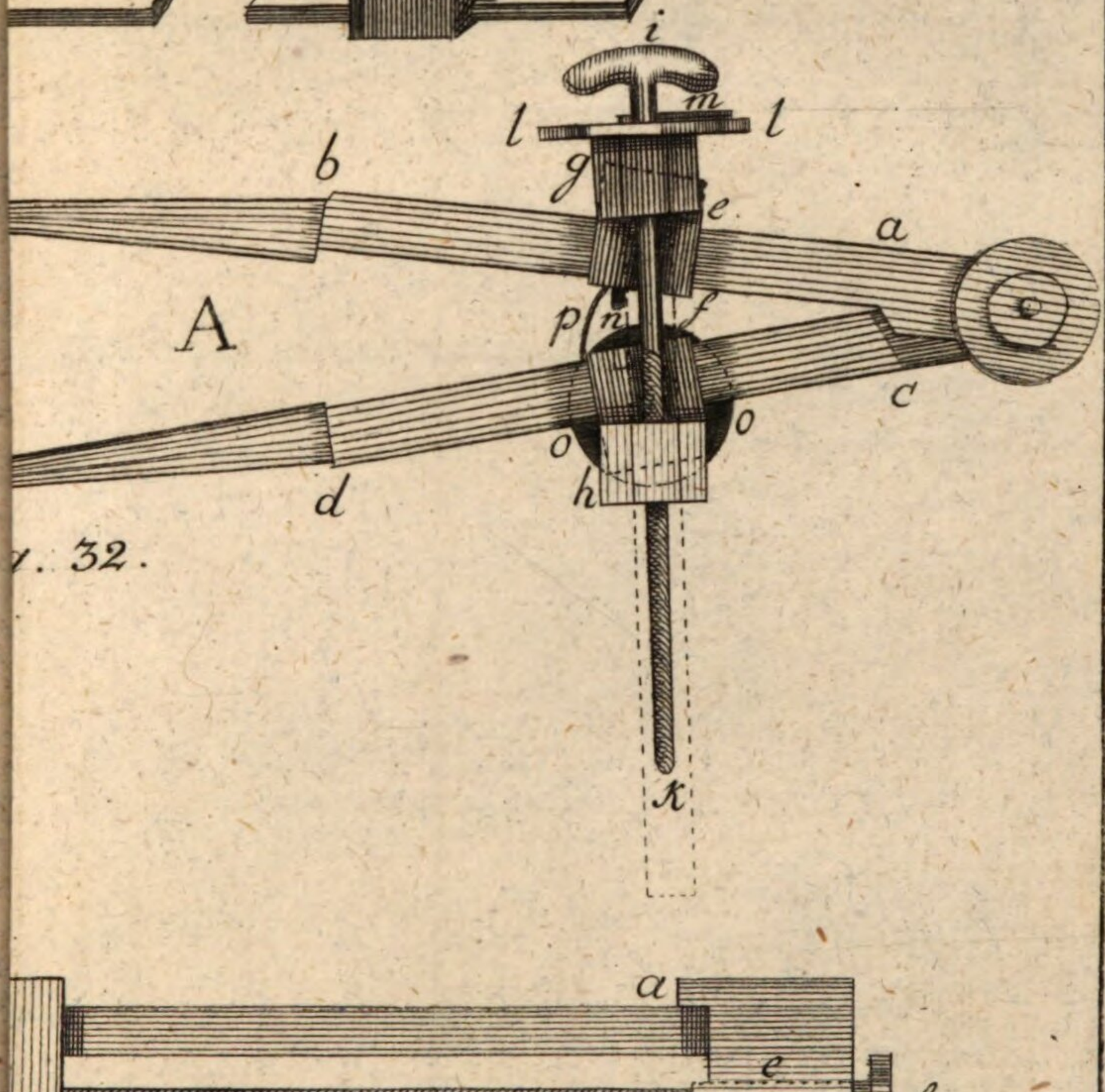
Voiths Abh.











y. 32.

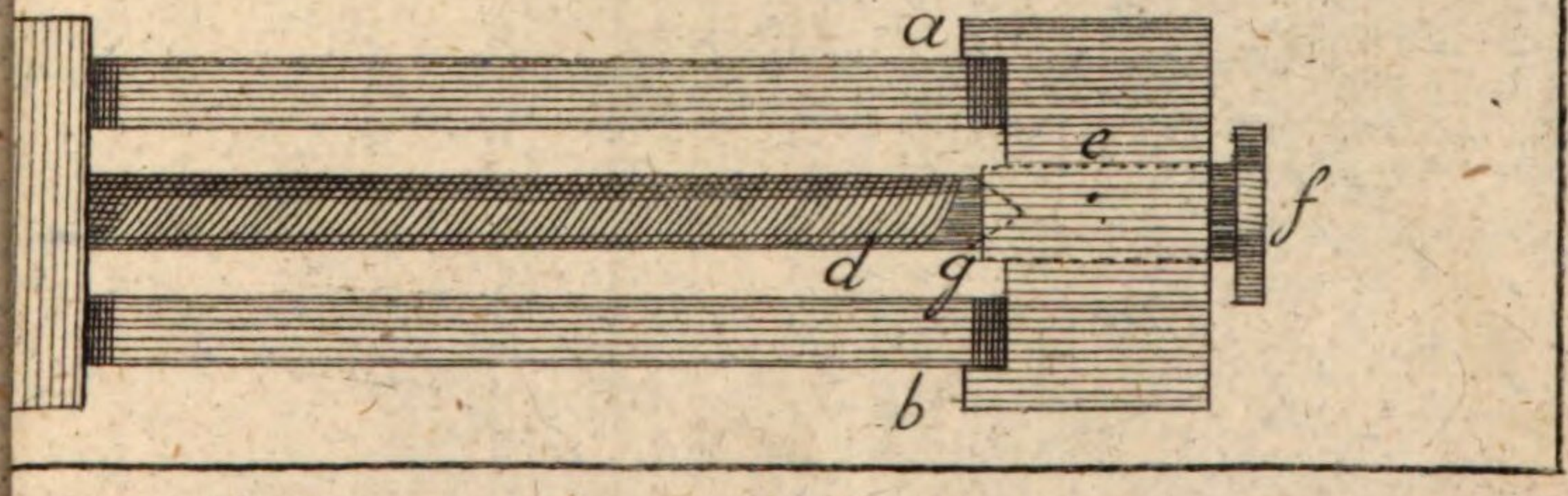
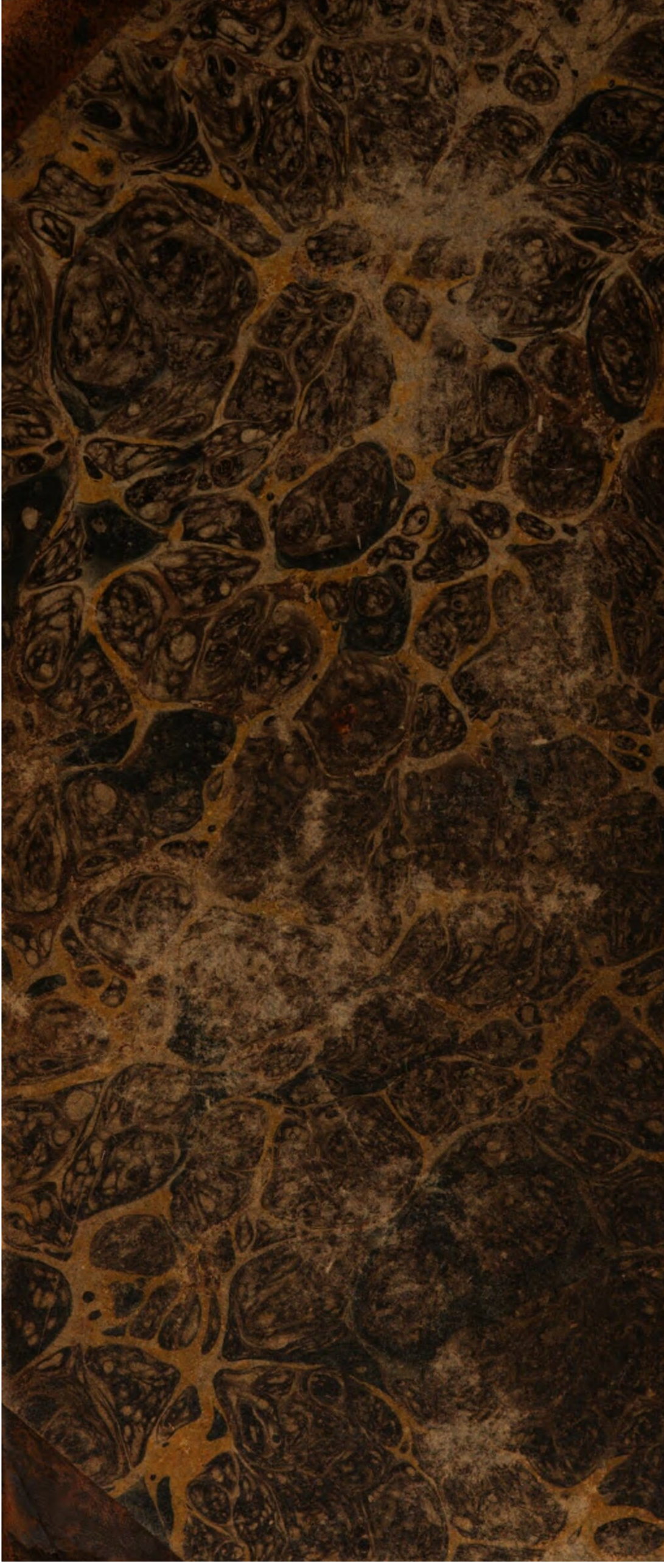


Fig. 38.

Fig. 37.

Fig. 35.

Tab. 5. 6.



BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Magold, Maurus,

Mathematisches Lehrbuch zum Gebrauche öffentlicher Vorlesungen auf der churfürstl. baierischen Landes-Universität zu Landshut

Bd.: 3,2

Landshut 1805

Math.u. 117-3,1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594111-1